Вступ. Теоретичні основи дослідження операцій

1.1. Дослідження операцій як наука та мистецтво

Основна мета процесу дослідження операцій полягає в тому, щоб виявити вигідний (оптимальний) спосіб дії при розв'язанні тієї чи іншої задачі організаційного керування в умовах, при яких мають місце обмеження відносно техніко-економічних характеристик і дефіциту ресурсної бази. Використання терміну дослідження операцій завжди зумовлює застосування математичних методів для моделювання процесів економічних систем і аналізу їх функціональних характеристик. Тому математичні методи й моделі займають у дослідженнях операцій центральне місце. Проте слід мати на увазі, що розв'язання задач організаційного керування не завжди зводиться до побудови моделей і виконання відповідних розрахунків. Це викликано тим, що під час формування керуючих рішень часом зустрічаються з чинниками, які для вірогідності розв'язку поставленої задачі є суттєвими, але не піддаються строгій математичній формалізації та, як наслідок, не можуть бути безпосередньо включеними у математичну модель. До таких чинників можна віднести людський фактор.

Під операціями розуміють будь-який керований захід, спрямований на досягнення поставленої мети. Результат операції залежить від методів її проведення та вмілої організації, тобто вибору деяких характеристичних параметрів системи. Будь-який визначений вибір параметрів називається розв'язком. Оптимальними рахуються ті розв'язки, які за певними критеріями переважають інші. Тому основною задачею дослідження операцій є попереднє кількісне обгрунтування оптимальних розв'язків.

Дослідження операцій як дієвий інструмент розв'язку задач організаційного керування можна розглядати із двох позицій – як науку і як мистецтво. Справедливість твердження відносно наукового підходу до формування керуючих рішень випливає з тієї обставини, що при вирішенні існуючих проблем досить вдало використовуються математичні методи та моделі. У той же час дослідження операцій можна розглядати і як мистецтво, оскільки якісне виконання комплексу етапів дослідження – від його початку до реалізації розв'язку, отриманого з допомогою побудованої моделі, - у значній мірі визначається творчими здібностями та інтуїцією дослідника. Ось чому дослідник повинен вміло використовувати математичний апарат і одночасно володіти певними навичками евристичного аналізу реальної ситуації.

Як бачимо, в дослідженні операцій головна роль належить математичному моделюванню. Для побудови математичної моделі необхідно мати строге уявлення відносно мети функціонування досліджуючої системи і володіти інформацією про обмеження, що визначають область допустимих значень керованих змінних. Мета та обмеження повинні бути представлені у вигляді функцій від керованих змінних. Проведений економіко-математичний розрахунок має привести до визначення оптимальної стратегії впливу на об’єкт керування за умови виконання множини прийнятих обмежень.

Складність і велика розмірність систем, зокрема соціально-економічних, може дуже ускладнити процес відображення мети та обмежень у аналітичному вигляді. Тому виникає необхідність у проведенні процедури зменшення реальної розмірності задачі до таких меж, які б із достатньою степеню точності адекватно відобразили реальну дійсність. Не дивлячись на велике число змінних і обмежень, які на перший погляд слід враховувати при аналізі реальних ситуацій, лише невелика їх частина виявляється суттєвою для опису поведінки досліджуючих систем. Тому при виконанні процедури спрощення опису реальних систем, на основі якої буде побудована та чи інша модель, насамперед необхідно ідентифікувати домінуючі змінні, параметри та обмеження.

Схематичне зображення рівнів абстракції, які відповідають процедурі процесу переходу від системи-оригіналу до її моделі, представлене на рис. 1.1. Прообраз реальної системи відрізняється від системи-оригіналу тим, що в ньому знаходять відображення тільки домінуючі чинники (змінні, параметри й обмеження), які визначають генеральну стратегію поведінки реальної системи. Модель, будучи у подальшому прообразом реальної системи, представляє собою найбільш суттєві для опису системи співвідношення у вигляді цільової функції та сукупності обмежень.

При розв’язанні конкретних прикладних задач керування використання методів дослідження операцій припускає:

- побудову економіко-математичних моделей для задач прийняття рішень у складних ситуаціях або в умовах ризику та невизначеності;

- вивчення взаємозв'язків і залежностей, які в майбутньому послужать основою прийняття вигідних рішень і вироблення критеріїв ефективності, які дають можливість оцінити перевагу того чи іншого сценарію розвитку.

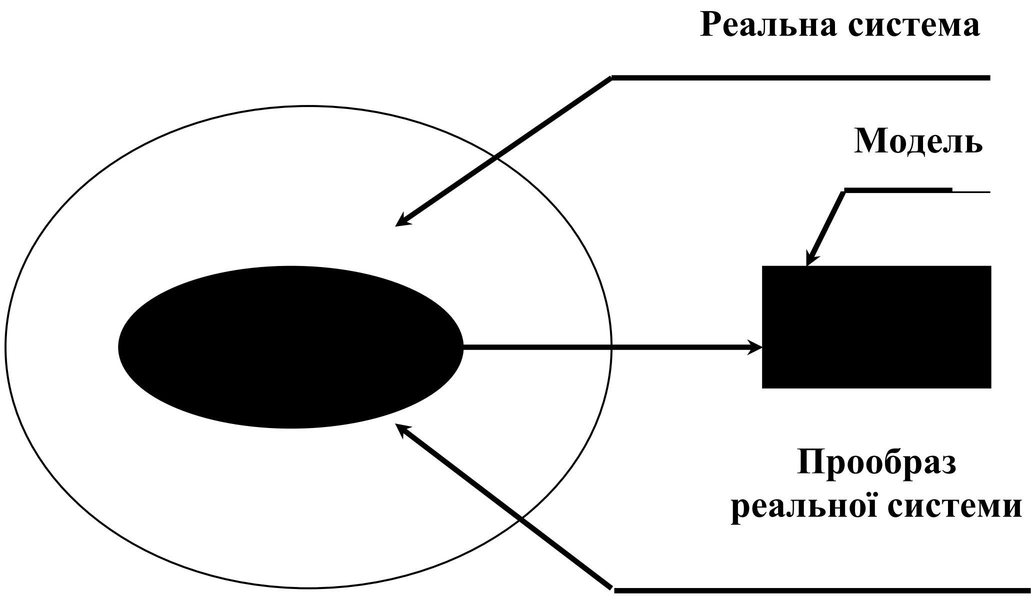


Рис. 1.1. Абстрактне зображення рівнів системи.

Можна сказати, що дослідження операцій – математична теорія використання кількісних методів аналізу в процесі прийняття рішень у різних галузях цілеспрямованої діяльності. Основним методом теорії дослідження операцій є метод математичного моделювання в тісному поєднанні з використанням програмних продуктів і засобів комп'ютерної техніки.

1.1. Поняття моделі та моделювання

У ринкових умовах господарювання методи дослідження операцій
стають важливим інструментом для отримання більш глибоких і повних знань про кількісні та якісні сторони економічного механізму тих чи інших процесів і явищ.

Метод "проб і помилок" у наші дні непридатний, дуже мало часу залишається для "проб" і досить дорогими можуть бути помилки. У ринкових умовах не повинно бути місця свавільним, так званим “вольовим” рішенням. Стратегічні рішення необхідно приймати не інтуїтивно, а на підставі всебічного статистичного аналізу та математичних розрахунків. І не випадково, саме в наш час, відзначається активний ріст використання математичних методів в макро- та мікроекономічних дослідженнях. Замість того, щоб “пробувати і помилятися” на реальних об’єктах, аналітики дають перевагу робити це з допомогою економіко-математичних моделей. Побудова таких моделей є однією з найважливіших задач прикладної математики.

Внутрішньою характеристикою раціонального керування господарського комплексу та його складових є оптимальність, тобто вибір із множини всеможливих варіантів економічного розвитку такого, який дає можливість найефективніше використовувати наявні виробничі та фінансові ресурси.

З точки зору оптимального планування та керування, підприємство або структурний підрозділ розглядається як система, в якій комплексно відображається технологічний, економічний та організаційний взаємозв’язок керованого об’єкта, а також його складових.

Оптимальні плани виробничих та господарських структур повинні забезпечувати балансовий взаємозв’язок завдань для випуску продукції з виробничими та фінансовими ресурсами, які є в наявності. Друга задача оптимального планування – ефективне використання виробничих та фінансових ресурсів при дотриманні оптимальних структурних пропорцій.

Концепція оптимального керування народним господарством та його галузями бере свій початок в наукових працях академіків Л.В. Канторовича, В.В. Новожилова, В.С. Немчинова та ін. За висловом Л.В. Канторовича, оптимальний розрахунок – це третя компонента, яка дає можливість отримати додатковий ефект при тих самих ресурсах, але за короткий час. Таким чином, оптимальний – це такий план, який забезпечує виконання даної виробничої програми при мінімальних виробничих витратах або максимальний виробничий ефект при заданому обсязі ресурсів.

З оптимальним планом безпосередньо пов’язане поняття економіко-математичної моделі, яка представляє собою концентрований вираз існуючих взаємозв’язків і закономірностей процесу функціонування економічної системи в математичній формі. Даний вираз складається із сукупності пов’язаних між собою математичних залежностей у вигляді формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов та факторних величин, всі або частина яких має економічний зміст. За своїм призначенням в економіко-математичних моделях ці фактори доцільно поділити на параметри та характеристики (рис. 1.2.). При цьому параметрами об’єкта називають фактори, які характеризують властивості об’єкта або складових його елементів. У процесі дослідження об’єкта ряд параметрів може змінюватися, тому їх називають змінними, які в свою чергу поділяються на змінні стану та змінні керування. Як правило, змінні стану об’єкта являються функцією змінних керування та дій зовнішнього середовища. Характеристиками (вихідними характеристиками) називаються безпосередні кінцеві результати функціонування об’єкта (зрозуміло, що вхідні характеристики являються змінними станів). Відповідно характеристики зовнішнього середовища описують його властивості, які впливають на процес та результат функціонування об’єкта. Значення ряду факторів, які визначають початковий стан об’єкта або зовнішнього середовища, називаються початковими умовами.

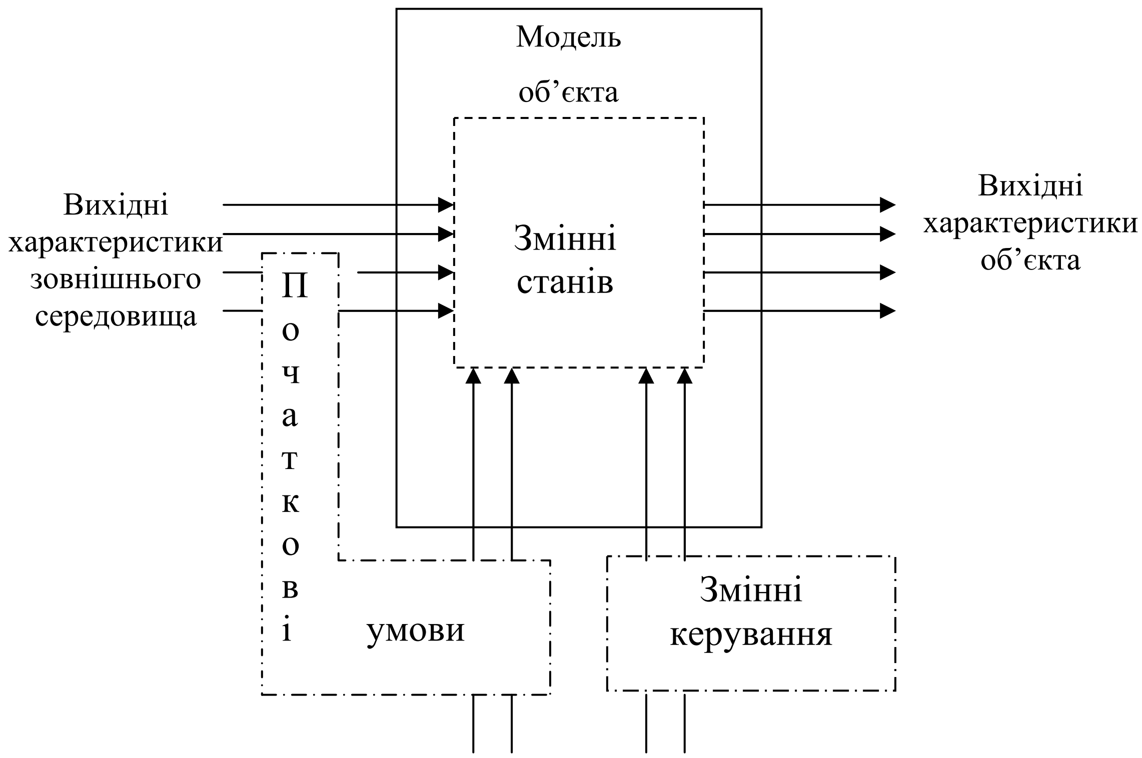


Рис. 1.2. Класифікація факторів за їх місцем в економіко-математичних моделях.

Моделювання – процес побудови моделі, за допомогою якого вивчається функціонування об’єктів різної природи. Він складається з трьох основних елементів: суб’єкта, об’єкта дослідження та моделі, за допомогою якої суб’єкт пізнає об’єкт.

Модель – це такий матеріально або розумово зображуваний об’єкт, який у процесі дослідження замінює об’єкт - оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об’єкт.

Загальне схематичне зображення основних етапів цього процесу моделювання показано на рис. 1.3.

Розрізняють фізичне та математичне моделювання. Математичне моделювання – універсальний та ефективний інструмент пізнання внутрішніх закономірностей, властивих явищам і процесам. Воно дає можливість вивчити кількісні взаємозв’язки і взаємозалежності моделюючої системи і вдосконалити її подальший розвиток та функціонування.

Серед існуючих систем економічні системи є найскладнішими, тому при побудові їх моделей слід відображати тільки найважливіші та найхарактерніші властивості процесів або явищ, що вивчаються. Внаслідок цього всі моделі є спрощеним відображенням реальної системи, але якщо цей процес виконано коректно, то отримане наближене відображення реальної ситуації дає можливість мати достатньо точні характеристики об’єкта дослідження.

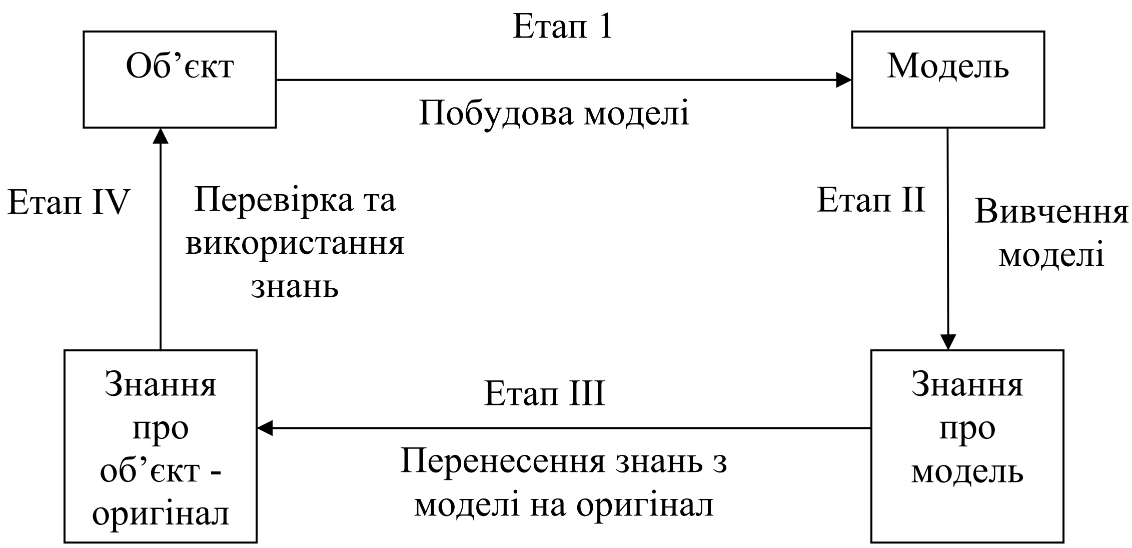


Рис. 1.3. Основні етапи моделювання

Для того, щоби моделювання стало діючим інструментом пізнання, необхідно правильно побудувати математичну модель, адекватну процесу, що вивчається. Отже, математична модель являє собою систему математичних формул, нерівностей або рівнянь, які більш або менш адекватно описують явища та процеси, що властиві оригіналу.

Економіко-математичні моделі самі по собі не створюють нових і не змінюють існуючих принципів та методологічних основ економічної теорії, а тільки, спираючись на них, змінюють способи їх використання для всебічного кількісного та якісного аналізу закономірностей і взаємозв'язків економічних процесів.

При побудові економіко-математичної моделі слід вміло володіти наступними поняттями: критерій оптимальності, цільова функція, система обмежень, рівняння зв'язку, розв'язок моделі.

Критерієм оптимальності називається деякий показник, який має економічний зміст та служить способом формалізації конкретної мети керування і виражається за допомогою цільової функції через фактори моделі. Критерій оптимальності визначає розуміння змісту цільової функції. У деяких випадках в якості критерію оптимальності може виступати одна із вихідних характеристик об'єкта моделювання.

Цільова функція математично зв'язує між собою фактори моделі, і її значення визначається значеннями цих величин. Змістовне тлумачення цільовій функції надає тільки критерій оптимальності.

Не слід змішувати критерій оптимальності та цільову функцію. Так, наприклад, критерій прибутку та критерій загальної вартості випущених інвестиційною компанією акцій можуть описуватися однією і тією ж цільовою функцією:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \to \max, \qquad (1.1.)$$

де i - індекс виду акцій $i = \overline{1,n}$; X_i - обсяг випуску акцій i-го виду; C_i - прибуток від випуску одиниці акцій i-го виду або вартість одиниці акцій i-го виду в залежності від змісту критерію оптимальності.

Критерій прибутку може бути розрахований за допомогою нелінійної цільової функції:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} C_i(X_i) X_i \to \max, \qquad (1.2.)$$

якщо прибуток від випуску одиниці акцій *i*-го виду (C_i) є функцією від обсягу випуску X_i.

При наявності декількох критеріїв оптимальності кожний з них буде формалізований своєю частковою цільовою функцією Z_k, де *k*-індекс критерію оптимальності $k = \overline{1, K}$. Для компромісного вибору оптимального розв'язку можна сформулювати нову цільову функцію:

$$Z = f(Z_1, ..., Z_k) \to extr \tag{1.3.}$$

Проте дана цільова функція може вже не мати економічного змісту, в такому випадку критерій оптимальності для неї відсутній.

Система обмежень визначає границі, існування області дійсних та допустимих розв'язків і характеризує основні зовнішні та внутрішні властивості об'єкта. Обмеження визначають область відбуття процесу, границі зміни параметрів та характеристик об'єкта.

Рівняння зв'язку являються математичною формалізацією системи обмежень. Між поняттями "система обмежень" та "рівняння зв'язку" існує точно така сама аналогія, як між поняттями "критерій оптимальності" та "цільова функція": різні за змістом обмеження можуть описуватися однаковими рівняннями зв'язку, а одне і те ж саме обмеження в різних моделях може записуватись різними рівняннями зв'язку.

Таким чином, саме критерій оптимальності та система обмежень в першу чергу визначають концепцію функціонування майбутньої математичної моделі, її концептуальну модель, а їх формалізація, тобто побудова цільової функції та рівнянь зв'язку, представляють собою математичну модель.

Розв'язком математичної моделі називається такий набір (сукупність) значень змінних, які задовольняють її рівняння зв'язку. Розв'язки, які мають економічний зміст, називаються структурно допустимими. Моделі, які мають багато розв'язків, називаються варіантними на відміну від без варіантних, які мають один розв'язок. Серед структурно допустимих варіантних розв'язків моделі, як правило, знаходиться один розв'язок, при якому цільова функція в залежності від змісту моделі має найбільше або найменше значення. Такий розв'язок, як і відповідне значення цільової функції, називається оптимальним.

1.3. Теоретичні основи математичного моделювання та класифікація моделей

Економіко – математичне моделювання є одним із ефективних методів опису функціонування складних соціально-економічних об'єктів та процесів у виді математичних моделей, об'єднуючи тим самим в єдине ціле економіку та математику.

У структурі економіко-математичних методів можна виділити наступні дисципліни та їх розділи, які складають теоретичну основу математичного моделювання:

- економічну кібернетику (системний аналіз економіки, теорію економічної інформації, теорію керуючих систем і т.д.);
- економетрію (дисперсійний аналіз, кореляційний аналіз, регресійний аналіз, багатомірний аналіз, факторний аналіз, кластерний аналіз і т.д.);
- математичну економіку (теорію економічного росту, теорії виробничих функцій, міжгалузеві баланси, національні рахунки, аналіз попиту та пропозицій, регіональний та просторовий аналіз, глобальне моделювання і т.д.);
- методи дослідження операцій (математичне програмування, сіткове моделювання, теорію масового обслуговування, методи керування запасами, теорію ігор та методи прийняття рішень і т.д.);
- експертні методи економіки (математичні методи аналізу і планування економічних експериментів, імітаційне моделювання, ділові ігри, методи експертних оцінок і т.д.);
- методи прогнозування.

У прикладних дослідженнях економічних процесів і явищ використовуються різні типи моделей, які відрізняються цільовим призначенням моделі, характером задачі, ступенем адекватності, математичним апаратом та ін. Побудова однієї єдиної математичної моделі функціонування будь-якої економічної системи або її складових практично не представляється можливим без розробки допоміжних моделей, тобто певного комплексу взаємозв'язаних моделей.

Вид і характер економіко-математичних моделей визначається взаємозв'язками та взаємозалежностями економічних систем. Взаємозв'язки одних систем можна описати на основі лінійних рівнянь і нерівностей, других – на основі рівнянь і нерівностей більш високих порядків, третіх – на основі кореляційного аналізу, четвертих – на основі теорії ймовірностей і т.д.

В основу класифікації економіко-математичних моделей покладено наступні ознаки:

1) за цільовим призначенням – теоретико-аналітичні та прикладні моделі;
2) за ступенем агрегування об’єктів – макроекономічні та мікроекономічні моделі;
3) за конкретним призначенням – балансові, трендові, оптимізаційні, імітаційні моделі;
4) за типом інформації, використаної в моделі – аналітичні та ідентифіковані моделі;
5) за врахуванням фактора невизначеності – детерміновані та стохастичні моделі;
6) за характером математичного апарату – матричні моделі, моделі лінійного та нелінійного програмування, кореляційно-регресійні моделі, моделі теорії масового обслуговування, моделі сіткового планування та керування, моделі теорії ігор і т.п.;
7) за типом підходу до досліджуючих систем – дескриптивні (описові) моделі (наприклад, балансові та трендові моделі) та нормативні моделі (оптимізаційні та моделі рівня життя);
8) за структурою моделей та характером їх складових – одно- та багатофакторні моделі, статичні та динамічні моделі, моделі простої та складної структури;
9) за часовими характеристиками – довготермінові, середньотермінові та короткотермінові моделі.

До числа складної комбінованої економіко-математичної моделі, наприклад, можна віднести економіко-математичну модель міжгалузевого балансу, яка являється за вище приведеною класифікацією прикладною, макроекономічною, аналітичною, дескриптивною, детермінованою, балансовою, матричною моделлю, причому розрізняють як статичні, так і динамічні моделі.

Розглянемо коротко основні якісні характеристики деяких економічних моделей.

Макроекономічні моделі переважно описують економіку країни як єдине ціле, зв’язуючи між собою узагальнюючі матеріальні та фінансові показники: валовий внутрішній продукт, споживання, інвестиції, зайнятість, бюджет, інфляцію, ціноутворення, оподаткування та ін.

Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних та функціональних складових економіки або їх автономну поведінку в перехідному або ринковому середовищі, стратегії поведінки фірм в умовах олігополії з використанням методів оптимізації та теорії ігор та ін.

Теоретичні моделі відображають загальні властивості економіки та її компонентів з дедукцією висновків із формальних передумов. Прикладні моделі забезпечують можливість оцінки параметрів функціонування конкретних техніко-економічних об'єктів та обгрунтування висновків для прийняття управлінських рішень (до їх числа відносяться насамперед економетричні моделі, які дають можливість статистично оцінювати числові значення економічних показників на основі наявних спостережень).

Рівновагові моделі описують поведінку суб'єктів господарювання як в стабільних стійких станах, так і в умовах нестійкого економічного середовища, де нерівновага за одними параметрами компенсується іншими факторами. Оптимізаційні моделі зв'язані в основному з мікрорівнем, на макрорівні результатом раціонального вибору поведінки суб'єктів являється деякий стан рівноваги.

Статичні моделі описують стан економічного об'єкту в конкретний поточний момент або період часу, динамічні моделі, навпаки, включають взаємозв'язки змінних в часі.

У статичних моделях переважно зафіксовані значення деяких величин, які є змінними в динаміці, наприклад, капітальні вкладення, ціни і т.д. Динамічна модель не зводиться до простого сумування деяких статичних величин, а описує сили та взаємодії в економіці, які визначають хід процесів в ній. Динамічні моделі переважно використовують апарат диференціальних та різницевих рівнянь, варіаційного числення.

Детерміновані моделі припускають існування функціональних зв'язків між змінними моделі, а стохастичні моделі допускають наявність випадкових дій на досліджувані показники, використовуючи в якості інструментарію методи теорії ймовірності та економетрії.

Основу математичного апарату дослідження операцій складають методи математичного програмування, методи теорії корисності та прийняття рішень, методи й алгоритми теорій масового обслуговування, ігор і марківських процесів, методи управління запасами, сіткового та імітаційного моделювання. Згадані методи служать дієвим інструментом при розв'язанні відповідних типів прикладних задач.

1.4. Принципи та етапи побудови економіко-математичних моделей

Для побудови як комплексу взаємозв'язаних економіко-математичних моделей, так і будь-якої окремої моделі, необхідна певна сукупність принципів (правил гри), які дають можливість коректно здійснювати процес формалізації моделюючих систем та об'єктів.

Загальні принципи економіко-математичного моделювання випливають із загальних основ системного аналізу, тобто вони повинні бути відповідями на наступні запитання: 1) що повинно бути зроблено; 2) коли повинно бути зроблено; 3) з допомогою кого повинно бути зроблено; 4) на основі якої інформації здійснюються відповідні дії; 5) який результат повинен бути отриманий на основі цих дій.

Тому в якості загальних принципів економіко-математичного моделювання доцільно прийняти наступні принципи: достатності та інваріантності використаного інформаційного забезпечення, наступності та ефективності реалізації систем моделей. Розглянемо більш ширше кожний з цих принципів.

Принцип достатності використаної інформації означає, що в кожній окремій моделі повинно використовуватися тільки те інформаційне забезпечення, яке відоме з необхідною для результатів моделювання точністю. Під відомим інформаційним забезпеченням розуміють нормативні, довідкові, звітні та інші характеристичні дані про реальні економічні системи та їх складові, наявні до моменту моделювання. У зв'язку з послідовною розробкою комплексу моделей, які описують складний об'єкт і формалізовані окремою моделлю, вся інформація про моделюючу систему може бути не повністю відома до моменту розв'язку деякої задачі. Проте це не заважає використанню окремої моделі, якщо вона побудована з дотриманням принципу достатності. Крім цього, виконання принципу достатності дає можливість переходити від загальних моделей до більш детальних, поступово уточнюючи та конкретизуючи результати досліджень.

Принцип інваріантності інформації вимагає, щоб в моделі вхідна інформація була незалежна від параметрів моделюючої системи, які ще не відомі на даній стадії дослідження. Використання цього принципу дає можливість позбутися при побудові моделей часто зустрічаючого замкнутого кола, коли в моделі використовується інформація, яка може бути відома лише за результатами моделювання.

Використання принципів достатності та інваріантності приводить до формування ієрархії економіко-математичних моделей для складного об'єкту, дозволяє строго визначити вхідні параметри рівняння зв'язку і цільові функції, формалізувати критерії оптимальності і обмеження для кожної окремої моделі. Так, вхідними параметрами для загального випадку можуть бути або вхідні дані моделей попереднього рівня, або результати функціонування моделей нижніх рівнів ієрархії, але отримані на основі інформації, інваріантної відносно шуканих на даному рівні змінних.

Зміст принципу наступності зводиться до того, що кожна модель не повинна порушувати властивостей об'єкту, встановлених або відображених у попередніх моделях комплексу. Отже, вибір критеріїв та моделі повинен в першу чергу грунтуватися на принципі наступності при умові, що забезпечується виконання принципів достатності та інваріантності використаної інформації. Якщо ж наступна модель не є складовою попередніх, то раніше побудовані моделі повинні бути скориговані для забезпечення принципу наступності.

Важливим із точки зору практичного використання комплексу моделей є принцип ефективності реалізації. Для його виконання необхідно, щоби кожна окрема модель могла бути реалізована з допомогою сучасних програмних та технічних засобів. З другої сторони, виконання даного принципу вимагає забезпечення відповідної точності вхідних даних, точності розв'язку задачі і тієї точності результуючої інформації, яка достатня для практичних цілей.

Подані принципи дають можливість будувати довільну окрему модель функціонування економічних систем і гарантують можливість її повної сумісності з іншими економіко-математичними моделями.

Процедуру побудови моделі та підготовку управлінського рішення на основі економіко-математичних методів можна представити з допомогою ряду взаємозв'язаних етапів, хоча в конкретних випадках деякі етапи можуть опускатися, а ряд робіт для побудови моделі – вестись паралельно.

Базовою основою для побудови моделі об'єкта є його концептуальна модель. Під концептуальною моделлю об'єкта розуміємо сукупність якісних залежностей критеріїв оптимальності і різного роду обмежень від факторів, суттєвих для адекватного відображення функціонування об'єкта. Концептуальна модель відображає наступні основні моменти:

- умови функціонування об'єкта, визначені характером взаємодій між об'єктом та його оточенням, а також між елементами об'єкта;
- мету дослідження об'єкта та напрямок покращення його функціонування;
- можливості керування об'єктом, визначення складу керованих змінних об'єкта.

У процесі формулювання концептуальної моделі об'єкта можуть виникати такі проблеми:

- побудова спрощеного і в той же час адекватного поставленій меті дослідження сценарію функціонування об'єкта;
- формулювання та уточнення мети дослідження;
- формалізація мети в критерії оптимальності;
- формалізація зовнішніх та внутрішніх обмежень;
- вибір факторів, які описують об'єкт і його оточення, котрі повинні бути враховані при дослідженні і відповідно включені в математичну модель;
- класифікація факторів і вибір серед них в першу чергу керованих змінних.

Побудова концептуальної моделі є важливим етапом моделювання, оскільки він визначає напрямки, цілі та область дослідження. Завершальним кроком побудови концептуальної моделі є оцінка її адекватності моделюючій ситуації.

Наступним етапом є формування на основі концептуальної моделі числової математичної моделі об'єкта. Головна проблема даного етапу – визначення кількісних математичних співвідношень, які формалізують якісні залежності концептуальної моделі. Навіть при наявності повністю побудованого сценарію ці співвідношення можуть бути неочевидними. У зв'язку з цим часто виникає необхідність у виконанні проміжного етапу між побудовою концептуальної і математичної моделей об'єкта – перетворення сценарію в алгоритм, який моделює взаємодію елементів між собою та оточенням в динаміці.

Для реалізації математичної моделі на персональних комп'ютерах вона повинна бути представлена у числовій формі, тобто задані числові значення констант, границі зміни невизначених факторів та керованих змінних, закони розподілу випадкових величин. Завершальним кроком формування математичної моделі є оцінка її адекватності по відношенню до концептуальної моделі.

Етап дослідження математичної моделі розпочинається з її аналізу (відношення до певного класу моделей), вибору відповідного методу її розв'язку та програмного забезпечення. Головна проблема цього етапу – розробка алгоритму оптимального або найкращого в заданих умовах розв'язку певної задачі.

Завершальним кроком процедури побудови економіко-математичної моделі є оцінка точності одержаних розрахунків та вироблення на їх основі ефективних прикладних рішень.

Ефективність прийняття рішень у великій мірі залежить від рівня досягнутої цілі дослідження, яка в свою чергу визначається метою побудови моделі. Моделі можуть будуватись для досягнення наступних цілей:

1. Виявлення функціональних співвідношень – визначення кількісних залежностей між вхідними факторами моделі та вихідними характеристиками об'єкту дослідження. Подібного роду моделі за своїм характером є описовими і присутні при побудові математичних моделей будь-яких типів.
2. Аналіз чутливості – встановлення з великого числа наявних факторів тих, які у значній мірі впливають на вихідні характеристики об'єкта дослідження. Моделі аналізу чутливості повинні обов'язково передбачати можливість варіації ряду факторів і можуть бути використані так само для оцінки точності розв'язків, отриманих за моделями будь-яких типів.
3. Прогноз – оцінка поведінки об'єкта на часовому інтервалі при деякому допустимому поєднанні зовнішніх умов. Переважно задачі прогнозу є динамічними відносно вхідних параметрів, і в якості незалежної змінної виступає час. Моделі прогнозу також є описовими.

4. Оцінка – визначення, наскільки адекватно об’єкт дослідження буде відповідати деяким критеріям. На відміну від розглянутих вище типів моделей моделі оцінки включають розрахунки інтегральних характеристик – критеріїв, які формалізують мету дослідження. Моделі оцінки займають проміжне місце між описовими та оптимізаційними моделями. У них задані критерій і його деяке “критичне” значення, але проводиться не оптимізація, а лише порівняння розрахункового значення з “критичним”, після чого приймається рішення про задоволення характеристик об’єкта поставленим вимогам.

5. Порівняння – співставлення обмеженого числа альтернативних варіантів систем або співставлення декількох припустимих принципів чи методів дій.

Число варіантів припускається незначним, у зв’язку з чим оцінюються всі варіанти, тобто здійснюється прямий перебір всієї множини. Хоча моделі даного типу близькі до оптимізаційних, спеціальний блок оптимізації у них відсутній.

6. Оптимізація – точне визначення такого поєднання змінних керування, при якому забезпечується екстремальне (максимальне або мінімальне в залежності від змісту критерію оптимальності) значення цільової функції. Суттєва різниця від наведеного вище випадку – наявність спеціального блоку оптимізації, який дозволяє цілеспрямовано і найбільш ефективно з обчислювальної точки зору переглядати множину альтернативних варіантів.

1.5. Економіка як об’єкт математичного моделювання

Дослідження операцій – наукова дисципліна, яка займається розробкою та практичним використанням методів найбільш вигідного керування різними організаційними системами. До організаційних систем відносяться промислові підприємства різних форм власності, виробничі об’єднання, концерни, акціонерні й приватні підприємства, економіка народногосподарського комплексу як у цілому, так і з її структурними складовими.

Керування довільною системою реалізується як процес, який підпорядковується певним закономірностям. Знання цих закономірностей допомагає визначити умови необхідності та достатності успішного відбуття даного процесу. Для цього всі параметри, що характеризують процес і зовнішні умови, повинні бути кількісно визначеними. Отже, методи дослідження операцій – кількісне обгрунтування прийняття рішень відносно організаційного керування.

Сучасна економічна наука, як на мікро-, так і на макрорівнях у своїх прикладних дослідженнях широко використовує наявний інструментарій математичних методів для формалізованого опису існуючих стійких кількісних характеристик та закономірностей розвитку соціально-економічних систем

Під соціально-економічною системою будемо розуміти складну ймовірнісну динамічну систему, яка включає в себе процеси виробництва, обміну, розподілу та споживання матеріальних та інших благ. Вона відноситься до класу кібернетичних, тобто керуючих систем.

Єдиного визначення категорії системи не існує. У своїх дослідженнях ми будемо користуватися наступним: системою називається сукупність взаємозв'язаних структурних елементів, сумісно реалізуючих певні визначені цілі. Досліджуючу множину елементів можна розглядати як систему, якщо виконуються наступні чотири ознаки:

- цілісність системи, тобто незвідність властивостей системи до суми властивостей складових її елементів;
- наявність мети та критерію дослідження даної множини елементів;
- наявність більш структурно-логічної зовнішньої по відношенню до даної, системи, так званої "середовищем";
- можливість виділення в даній системі взаємозв'язаних частин (підсистем).

З поняттям системи тісно взаємопов'язані категорії надсистеми і підсистеми. Надсистема – оточуюче систему середовище, в якому функціонує система. Підсистема – підмножина елементів, які реалізують цілі, погоджені з цілями системи.

Основними методами дослідження системи являється метод моделювання, тобто інструмент теоретичного аналізу та практичних дій, спрямований на розробку, вивчення та використання моделей.

Розглянемо характерні особливості математичного моделювання економічних процесів.

По-перше, математичне моделювання як методологія наукових досліджень поєднує в собі досвід різних галузей науки про природу та суспільство, а саме: прикладної математики, інформатики та системного аналізу для вирішення фундаментальних проблем, які мають важливе макроекономічне значення. Математичне моделювання об'єктів складної природи – єдиний замкнутий цикл розробок від фундаментального дослідження проблеми до конкретних числових розрахунків показників ефективності функціонування об'єкта. Результатом розробок може бути система математичних моделей, які описують якісно різноманітні закономірності функціонування об'єкта та його еволюцію в цілому, як складної системи в різних умовах. Розрахункові експерименти з допомогою математичних моделей дають вихідні дані для оцінки показників ефективності функціонування об'єкта. Тому математичне моделювання, як методологія організації наукової експертизи великих проблем, є незамінним при розробці макроекономічних рішень.

По-друге, за своєю суттю математичне моделювання є методом розв'язку нових складних проблем, тому дослідження відносно математичного моделювання повинно бути упереджуючим: слід завчасу розробляти нові методи та готувати спеціалістів-аналітиків, які вміють зі знанням справи використовувати ці методи для розв'язання нових прикладних задач.

По-третє, ті, від кого залежить розподіл ресурсів, ще не повністю усвідомили, що методи математичного моделювання мають велике народногосподарське значення і від їх розвитку залежить розвиток соціально-економічного та науково-технічного прогресу країни. Досвід показує, що відносно компактні, але добре структуровані математичні моделі дають можливість отримувати нетривіальні розв'язки складних економічних програм.

У той же час необхідно звернути увагу на дві важливі особливості економіки як об'єкта моделювання:

- в економіці неможливі моделі подібності, які з великим успіхом використовуються в техніці;
- в економіці дуже обмежені можливості локальних експериментів, оскільки всі її складові тісно взаємопов'язані між собою, і як наслідок, "чистий" експеримент неможливий.

У такому випадку прогнозний розвиток та передбачення його наслідків можливі лише на основі концептуальних моделей функціонування економіки, які в свою чергу складають фундамент математичного моделювання.

Процес розробки математичних моделей досить трудомісткий, але ще важче досягти високої степені адекватності об’єкта дослідження та моделі.

При виконанні своєї головної функції економічна система здійснює наступні дії: розміщує ресурси, виробляє продукцію, розподіляє предмети споживання та здійснює нагромадження (рис.1.4.).

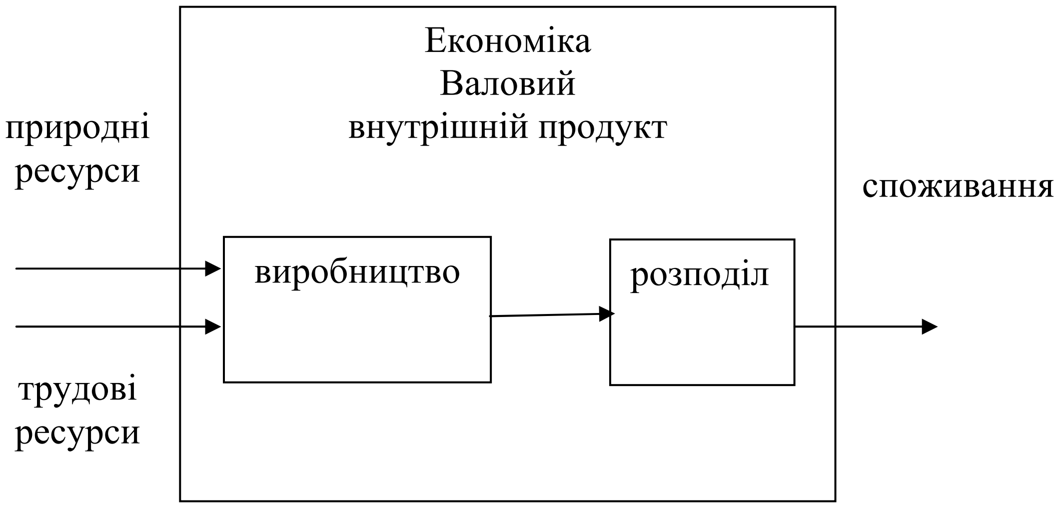


Рис. 1.4. Економіка як підсистема природи та суспільства

Основна мета економіки – забезпечення суспільства предметами споживання, в тому числі такими, які створюють умови для безпеки суспільства. Економіка складається з елементів – господарських одиниць (підприємств, фірм, банків, компаній і т.д.). Надсистема економіки – природа і суспільство, дві її головних підсистеми – виробнича та фінансово-кредитна. Функція фінансово-кредитної підсистеми полягає в регулюванні фінансових потоків (які йдуть в зворотному напрямку по відношенню до матеріальних) таким чином, щоб забезпечити стабільний і справедливий обмін товарами та послугами як між господарськими одиницями та їх об’єднаннями, так і між окремими членами суспільства, а також забезпечити фінансові умови для розвитку виробництва. В цих умовах гроші та цінні папери складають основу фінансових ресурсів.

1.6. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення предмету дослідження операцій.
2. Що означає термін “операція”?

3. Які задачі розв'язує наука дослідження операцій?
4. Опишіть абстрактне зображення рівнів системи.
5. Охарактеризуйте поняття економіко-математичної моделі.
6. Опишіть основні етапи моделювання, їх характеристики.
7. З яких елементів складається модель?
8. Дайте тлумачення основних складових економіко-математичної моделі.
9.Які дисципліни складають теоретичну основу математичного моделювання? Коротко опишіть їх структуру.
10. Чим визначається вид і характер економіко-математичної моделі?
11. Які ознаки покладено в основу класифікації економіко-математичних моделей?
12.Опишіть якісні характеристики основних економічних моделей.
13.У чому сутність загальних принципів економіко-математичного моделювання?
14. Дайте тлумачення загальних принципів економіко-математичного моделювання.
15. Що є базовою основою для побудови моделі об'єкта?
16. Опишіть основні цілі побудови моделі.
17. Дайте означення системи, надсистеми та підсистеми.
18.Назвіть та опишіть характерні особливості математичного моделювання.
19. Що складає основу математичного апарату дослідження операцій?

Програма дисципліни „Дослідження операцій”

Модуль 1. Методи оптимального управління ресурсами.

Вступ. Історія виникнення та формування курсу “Дослідження операцій”. Визначення дослідження операцій. Об’єкт, предмет, мета, завдання та структура навчальної дисципліни. Місце і роль методів дослідження операцій у підготовці висококваліфікованих аналітиків. Взаємозв’язок курсу з іншими дисциплінами. Поняття моделі та моделювання. Основні структурні складові економіко-математичного моделювання, їх класифікація. Принципи та етапи побудови економіко-математичних моделей.

Література: [1]–[4].

Тема 1. Моделі оптимального розподілу ресурсів.

Загальна постановка задач динамічного програмування. Рівняння Р. Беллмана. Модель оптимізації розподілу фінансових ресурсів. Модель оптимальної заміни устаткування.

Література: [1]–[4].

Тема 2. Задачі оптимального управління запасами.

Загальна постановка задачі та типи моделей управління запасами. Статична модель економічного замовлення з відсутністю дефіциту запасів. Статична модель економічного замовлення з наявністю дефіциту запасів. Модель управління запасами з дискретним розподілом попиту. Модель управління запасами з неперервним розподілом попиту.

Література: [1]–[4].

Модуль 2. Задачі планування, масового обслуговування та ігрові методи.

Тема 3. Моделі теорії масового обслуговування.

Основні елементи системи масового обслуговування та кількісні характеристики. Кількісні оцінки одно- та багатоканальних систем обслуговування з обмеженим числом вимог. Оптимізація системи масового обслуговування із змінним числом каналів.

Література: [1]–[4].

Тема 4. Основи сітьового моделювання.

Сіткова модель і її основні елементи. Порядок і правила побудови сіткових моделей. Упорядкування сіткового графіка. Види шляхів. Часові параметри сіткових графіків. Аналіз і оптимізація сіткових графіків.

Література: [1]–[4].

Тема 5. Прийняття рішень в умовах невизначеності.

Постановка задачі прийняття рішень в умовах невизначеності. Основні причини невизначеності. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності: Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца, Бейєса, мінімум середнього та Ходжеса-Лемана.

Література: [1]–[4].

Тема 6. Теорія ігор та ігрове моделювання.

Основні поняття теорії ігор і класифікація задач. Оптимальний розв'язок в іграх двох осіб з нульовою сумою. Змішані стратегії. Графічний метод розв'язування задач теорії ігор. Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування.

Література: [1]–[4].

Тема 1. Моделі оптимального розподілу ресурсів

1. 1. Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами

Досить часто фінансовим процесам властивий динамічний характер, тобто ми маємо справу з процесами, які функціонують і розвиваються у просторі і в часі. Розв'язання такого типу задач (задач динамічного програмування) здійснюється шляхом їх розкладу на відносно невелику та менш складні підзадачі. Для цього підходу характерним є розв'язок задачі з допомогою ряду етапів, пов'язаних між собою керованою змінною. Набір рекурентних обчислювальних процедур (співвідношень), які зв'язують між собою різні етапи, забезпечте отримання оптимального розв'язку задачі в цілому при завершенні останнього етапу.

Постановку задачі розглянемо на прикладі оптимального розподілу ресурсів між інвестиційними проектами. Для можливого розширення потужностей фірма виділяє фінансові ресурси розміром X грошових одиниць, які необхідно розділити в такий спосіб, щоб одержати максимально можливий сумарний прибуток.

Позначимо через x_i– розмір інвестицій, виділених під i–тий проект ($i = \overline{1,n}$), де i– індекс проекту. Отже, має місце рівність

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = X \tag{1.1}$$

На основі попереднього аналізу встановлено, що прибуток внаслідок реалізації i–того проекту задається функцією $f_i(x_i)$ (тобто залежить від виділеної під цей проект суми фінансових ресурсів x_i і не залежить від того, яка сума була виділена під інший проект). Тоді сумарний прибуток фірми становитиме

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \tag{1.2}$$

Наша задача полягає у знаходженні таких значень $x_i \geq 0$, які задовольняють обмеження (1.1) і забезпечують максимум функції (1.2).

Припустимо, що максимальний сумарний прибуток, одержаний при розподілі інвестицій розміром X для перших k проектів буде $F_k = \max[f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_k(x_k)]$, причому $x_1 + x_2 + ... + x_k = X$, $x_i \geq 0$.

Для визначення цих функцій побудуємо рекурентне рівняння при допомозі наступних етапів.

Почнемо з розподілу наявних коштів для першого проекту. Знайдемо максимальне значення прибутку за формулою:

$$F_1(X) = \max_{0 \le x_1 \le X}[f_1(x_1)] = f_1(X) \tag{1.3}$$

Переходимо до другого етапу розрахунків. Нам необхідно знайти оптимальний варіант розподілу інвестицій розміром *X*, при умові, що вони виділені першому та другому проекту. Тут слід враховувати отриману найкращу ефективність для першого проекту. Припустимо, що на другий проект виділені інвестиції розміром x_2, які дають $f_2(x_2)$ прибутку, а залишок ($\mathbf{X}$–x_2) виділяється першому проекту і він дає $F_1(X - x_2)$ прибутку. Тоді максимальний прибуток, отриманий від оптимального розподілу всіх інвестицій між першим і другим проектами буде:

$$F_2(X) = \max_{0 \le x_2 \le X}[f_2(x_2) + F_1(X - x_2)] \tag{1.4}$$

Переходимо до третього етапу, на якому необхідно знайти оптимальний варіант розподілу інвестицій при умові, що вони виділяються для перших трьох проектів разом.

Нехай на третій проект виділено x_3 одиниць коштів, які в свою чергу дадуть прибуток розміром $f_3(x_3)$. Наявний залишок ($\mathbf{X}$–x_3) виділимо першому та другому проектам, які при оптимальному розподілі дадуть прибуток $F_2(X - x_3)$ грош. од. Тоді максимальний прибуток, отриманий від розподілу інвестицій між першими трьома проектами буде:

$$F_3(X) = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(x_3) + F_2(X - x_3)] \tag{1.5}$$

Розглянемо загальний випадок розподілу інвестицій для перших k проектів. Нехай $k-$тому проекту виділено x_k одиниць інвестицій, які забезпечать йому прибуток розміром $f_k(x_k)$.Залишок інвестицій ($\mathbf{X}$–$x_к$) передамо першим (*к*-1) проектам, де вони при оптимальному розподілі принесуть фірмі $F_{k-1}(X - x_k)$ прибутку. При цьому фірма отримає сумарний максимальний прибуток рівний:

$$F_k(X) = \max_{0 \le x_k \le X}[f_k(x_k) + F_{k-1}(X - x_k)] \tag{1.6}$$

Отже, ми вивели рекурентне співвідношення (1.6), яке є рівнянням Р. Беллмана для задачі (1.1)–(1.2).

Приклад 1.1.

Фірма розглядає можливість вкладення коштів у три інвестиційні проекти у розмірі 200 млн. грн. Необхідно розрахувати оптимальний варіант вкладень коштів, який забезпечить фірмі отримання максимального прибутку.

Таблиця 1.1

Розмір інвестицій, X млн.грн.	*Приріст доходів*		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
100	70	90	60
200	150	140	170

Розв'язання. Для знаходження оптимального варіанту вкладень коштів використаємо функціональне рівняння (1.6). Розрахунки проведемо у три етапи. Насамперед знайдемо оптимальне значення варіанту вкладень для першого проекту. Оскільки $F_1(X) = \max\limits_{0 \le x_1 \le X}[f_1(x_1)] = f_1(X)$, то переходимо до визначення оптимального значення розподілу інвестицій , виділених двом першим проектам разом. Для цього використаємо формулу $F_2(X) = \max\limits_{0 \le x_2 \le X}[f_2(x_2) + F_1(X - x_2)]$, у якій надамо x_2 усіх можливих значень (100; 200). Розглянемо випадок розподілу інвестицій розміром 100 млн. грн. Отримаємо:

$$F_2(100) = \max\limits_{0 \le x_2 \le X}[f_2(x_2) + F_1(100 - x_2)] = \max\limits_{0 \le x_2 \le X}[f_2(0) + F_1(100); f_2(100) + F_1(0)] =$$

$$= \max\limits_{0 \le x_2 \le X}[0 + 70;\ 90 + 0] = 90 \text{ млн. грн.}$$

Максимальне значення одержано за рахунок другого члена, тобто $f_2(100) + F_1(0)$. Це означає, що другому проекту слід виділити 100 млн. грн., а першому не виділяти нічого.

Аналогічно проводимо обчислення для значення вкладень 200 млн. грн.:

$$F_2(200) = \max\limits_{0 \le x_2 \le X}[f_2(x_2) + F_1(200 - x_2)] = \max\limits_{0 \le x_2 \le X}[f_2(0) + F_1(200);\ f_2(100) + F_1(100);$$

$$f_2(200) + F_1(0)] = \max\limits_{0 \le x_2 \le X}[0 + 150;\ 90 + 70;\ 140 + 0] = 160 \text{ млн. грн.}$$

Одержаний результат показує, що інвестиції розміром 200 млн. грн необхідно порівно поділити між першими двома проектами.

Переходимо до третього етапу. Розрахунки проводимо аналогічно. При цьому слід враховувати отримані на другому етапі значення $F_2(X)$.

$$F_3(100) = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(x_3) + F_2(100 - x_2)] = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(0) + F_2(100); f_3(100) + F_2(0)] =$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le X}[0 + 90; 50 + 0] = 90 \text{ млн. грн.}$$

$$F_3(200) = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(x_3) + F_2(200 - x_3)] = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(0) + F_2(200);\ f_3(100) + F_2(100);$$

$$f_3(200) + F_2(0)] = \max_{0 \le x_3 \le X}[0 + 160;\ 50 + 90;\ 170 + 0] = 170 \text{ млн. грн.}$$

Отже, в результаті вкладення коштів у розмірі 200 млн. грн. у три проекти фірма отримає прибуток у сумі 170 млн. грн. При цьому всі кошти рекомендується вкласти у третій проект.

1. 2. Модель оптимальної заміни устаткування

На початку планового періоду, який складається з кількох років, виробничий підрозділ має в наявності одну одиницю устаткування фіксованої кількості років експлуатації. У процесі експлуатації устаткування дає щорічний прибуток, потребує експлуатаційних витрат і має відповідну залишкову вартість, причому всі згадані характеристики залежать від віку устаткування.

У довільний рік устаткування можна зберегти чи продати по залишковій вартості й купити замість нього нове устаткування за відомою ціною, котра може змінюватися в часі. Задача полягає в тому, що для планового періоду необхідно знайти оптимальну (загальний прибуток за період) тактику заміни (збереження) даного устаткування, тобто для кожного року в плановому періоді треба прийняти рішення : зберігати наявне устаткування на даний момент або продати його й придбати нове, щоб загальний прибуток за весь плановий період був максимальним.

Для побудови економіко-математичної моделі введемо позначення: t – вік устаткування, t = 0, 1, 2, … (t=0 відповідає використанню нового устаткування; t = 1 відповідає використанню устаткування віком один рік тощо); $x(t)$ – вартість продукції, виготовленої протягом одного року на устаткуванні віком t; $S(t)$ – залишкова вартість устаткування віком t; τ - проміжний час у плановому періоді; P - ціна нового устаткування; $u(t)$ – експлуатаційні витрати за один рік на устаткування віком t; t_0 – початковий вік устаткування ; N – плановий період.

Позначимо через f_n (t) сумарний прибуток за останні n років планового періоду при умові, що на початку цього періоду з n років у наявності є устакування віком t, і ми дотримуємося оптимальної політики в заміні. При цьому, $n = 1$ означає останній рік планового періоду (до кінця планового періоду залишився один рік); $n = 2$ – останніх два роки планового періоду (до кінця планового періоду залишилося два роки); $n = N$ – останніх N років планового періоду, тобто відповідає всьому плановому періоду.

Припустимо, що рішення приймається в момент часу $\tau = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ (при системі відліку відносно параметра n це означає $n = N$, $N-1$,…,1). Отже, плановий період ділиться на інтервали довжиною один рік, у кожному з яких приймається рішення – зберігати чи замінити устаткування.

Якщо в момент $\tau = i$ (початок i–го року, тут $n = \tau - i$) система перебуває в стані t (вік устаткування t) і прийнято рішення “зберігати устаткування”, то це означає, що дане устаткування, попрацювавши один рік, “постаріє” й опиниться на момент $\tau = i + 1$ (на початок наступного року) в стані $t + 1$- буде мати вік $t + 1$. Якщо на момент $\tau = i$ устаткування знаходилося в стані t і прийнято рішення “замінити устаткування”, то це означає, що в момент t наявне устаткування продається, а натомість купують нове (вік 0 років); воно працює один рік і до моменту $i + 1$ система виявиться в стані 1 (устаткування віком один рік).

Заміна існуючого устаткування віком t на нове доцільна в тому випадку, коли прибуток від нового устаткування більший від старого, тобто

$$S(t) - p + x(0) - u(0) > x(t) - u(t).$$

Якщо $S(t) - p + x(0) - u(0) \le x(t) - u(t)$, то наявне устаткування слід зберегти.

У відповідності до алгоритму динамічного програмування спочатку планується останній крок, для якого приймається рішення таким чином, щоб отримати максимальний прибуток. Виходячи з того, що $f_1(t)$ - прибуток, який на останньому етапі буде дорівнювати найбільшому значенню цих двох виразів, дістанемо:

$$f_1(t) = \max \begin{cases} x(t) - u(t) & \textbf{зберегти} \\ S(t) - p + x(0) - u(0) & \textbf{замінити.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Оптимальним рішенням за останні (n+1) роки, при умові, що на початку цього періоду з (n+1) року є устаткування віком t, буде рішення, яке забезпечить за останніх (n+1) роки максимальний прибуток, який визначається з виразу

$$f_{n+1}(t) = \max \begin{cases} x(t) - u(t) + f_n(t+1) & \text{зберегти} \\ S(t) - p + x(0) - u(0) + f(1) & \text{замінити.} \end{cases} \quad (1.8)$$

Співвідношення (1.7) і (1.8) встановлюють зв’язок між виразами t_n та t_{n+1}. Це рекурентні співвідношення, за якими можна знайти розв’язок задачі методом динамічного програмування.

Приклад 1.2.. До початку планового періоду в цеху встановлено устаткування. Залежність продуктивності цього устаткування від часу використання його цехом, а також залежність витрат на утримання й ремонт устаткування при різних термінах його використання наведені в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2.

Характеристика устаткування	Час, протягом якого використовується устаткування					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції, млн. грн.	100	85	75	70	70	65
Річні витрати, пов’язані з утриманням і ремонтом устаткування, млн. грн.	30	35	40	45	55	65

Витрати на придбання та встановлення нового устаткування складають 50 млн. грн. Устаткування, що замінюють, списується (залишкова вартість дорівнює нулю). Побудувати такий план заміни устаткування, за яким прибуток за даний період часу буде максимальним.

Розв’язання. Почнемо з визначення умовного оптимального розв’язку для останнього року планового періоду. Оскільки до початку планового періоду цех має нове устаткування, то вік устаткування до початку останнього етапу може бути 1, 2, 3 або 4 роки.

Для кожного значення t знайдемо умовно оптимальний розв'язок і відповідно значення функції $f_1(t)$ на основі формули (1.7).

$$f_1(1) = \max\begin{Bmatrix} 85 - 35 \\ 100 - 30 - 50 \end{Bmatrix} = 50 \qquad \text{зберегти;}$$

$$f_1(2) = \max\begin{Bmatrix} 75 - 40 \\ 100 - 30 - 50 \end{Bmatrix} = 35 \qquad \text{зберегти;}$$

$$f_1(3) = \max\begin{Bmatrix} 70 - 45 \\ 100 - 30 - 50 \end{Bmatrix} = 25 \qquad \text{зберегти;}$$

$$f_1(4) = \max\begin{Bmatrix} 65 - 55 \\ 100 - 30 - 50 \end{Bmatrix} = 20 \qquad \text{замінити.}$$

Вік устаткування до початку четвертого року планового періоду (n =2) може дорвнювати t=1, 2, 3. Користуючись формулою (1.8), знайдемо:

$$f_2(1) = \max\begin{Bmatrix} 85 - 35 + 35 \\ 100 - 30 - 50 + 50 \end{Bmatrix} = 35 \qquad \text{зберегти;}$$

$$f_2(2) = \max\begin{Bmatrix} 75 - 40 + 25 \\ 100 - 30 - 50 + 50 \end{Bmatrix} = 70 \qquad \text{замінити;}$$

$$f_2(3) = \max\begin{Bmatrix} 70 - 45 + 20 \\ 100 - 30 - 50 + 50 \end{Bmatrix} = 70 \qquad \text{замінити.}$$

Можливий вік устаткування до початку року (n = 3) може дорівнювати t = 1, 2. На основі формули (1.8) розрахуємо значення f_3 (t):

$$f_3(1) = \max\begin{Bmatrix} 85 - 35 + 70 \\ 100 - 30 - 50 + 85 \end{Bmatrix} = 120 \qquad \text{зберегти;}$$

$$f_3(2) = \max\begin{Bmatrix} 75 - 40 + 70 \\ 100 - 30 - 50 + 85 \end{Bmatrix} = 105 \qquad \text{зберегти.}$$

Аналогічно розглянемо випадок для n = 4, тобто t = 0. Отже, проблеми вибору немає: устаткування треба зберегти, а

$$f_5(0) = 100 - 30 + 120 = 190.$$

Враховуючи, що вік устаткування до початку планового періоду t = 0, і користуючись отриманими розрахунковими результатами в оберненому порядку їх формування, побудуємо оптимальну тактику заміни устаткування (табл. 1.3).

Таблиця 1.3.

Періоди		Роки планового періоду				
		1	2	3	4	5
Вік устаткування	1 2 3 4	зберегти	зберегти	зберегти зберегти	зберегти замінити замінити	зберегти зберегти зберегти замінити
Оптимальний розв’язок		зберегти	зберегти	зберегти	замінити	зберегти

Отже, оптимальний розв’язок даної задачі буде таким: заміни устаткування проводити на початку четвертого періоду.

Тема 1. Моделі оптимального розподілу ресурсів

1. 1. Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами

Досить часто фінансовим процесам властивий динамічний характер, тобто ми маємо справу з процесами, які функціонують і розвиваються у просторі і в часі. Розв'язання такого типу задач (задач динамічного програмування) здійснюється шляхом їх розкладу на відносно невелику та менш складні підзадачі. Для цього підходу характерним є розв'язок задачі з допомогою ряду етапів, пов'язаних між собою керованою змінною. Набір рекурентних обчислювальних процедур (співвідношень), які зв'язують між собою різні етапи, забезпечте отримання оптимального розв'язку задачі в цілому при завершенні останнього етапу.

Постановку задачі розглянемо на прикладі оптимального розподілу ресурсів між інвестиційними проектами. Для можливого розширення потужностей фірма виділяє фінансові ресурси розміром X грошових одиниць, які необхідно розділити в такий спосіб, щоб одержати максимально можливий сумарний прибуток.

Позначимо через x_i– розмір інвестицій, виділених під i–тий проект ($i = \overline{1,n}$), де i– індекс проекту. Отже, має місце рівність

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = X \qquad (1.1)$$

На основі попереднього аналізу встановлено, що прибуток внаслідок реалізації i–того проекту задається функцією $f_i(x_i)$ (тобто залежить від виділеної під цей проект суми фінансових ресурсів x_i і не залежить від того, яка сума була виділена під інший проект). Тоді сумарний прибуток фірми становитиме

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad (1.2)$$

Наша задача полягає у знаходженні таких значень $x_i \geq 0$, які задовольняють обмеження (1.1) і забезпечують максимум функції (1.2).

Припустимо, що максимальний сумарний прибуток, одержаний при розподілі інвестицій розміром X для перших k проектів буде $F_k = \max[f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_k(x_k)]$, причому $x_1 + x_2 + ... + x_k = X$, $x_i \geq 0$.

Для визначення цих функцій побудуємо рекурентне рівняння при допомозі наступних етапів.

Почнемо з розподілу наявних коштів для першого проекту. Знайдемо максимальне значення прибутку за формулою:

$$F_1(X) = \max_{0 \le x_1 \le X}[f_1(x_1)] = f_1(X) \qquad (1.3)$$

Переходимо до другого етапу розрахунків. Нам необхідно знайти оптимальний варіант розподілу інвестицій розміром *X*, при умові, що вони виділені першому та другому проекту. Тут слід враховувати отриману найкращу ефективність для першого проекту. Припустимо, що на другий проект виділені інвестиції розміром x_2, які дають $f_2(x_2)$ прибутку, а залишок ($\mathbf{X}$–x_2) виділяється першому проекту і він дає $F_1(X - x_2)$ прибутку. Тоді максимальний прибуток, отриманий від оптимального розподілу всіх інвестицій між першим і другим проектами буде:

$$F_2(X) = \max_{0 \le x_2 \le X}[f_2(x_2) + F_1(X - x_2)] \qquad (1.4)$$

Переходимо до третього етапу, на якому необхідно знайти оптимальний варіант розподілу інвестицій при умові, що вони виділяються для перших трьох проектів разом.

Нехай на третій проект виділено x_3 одиниць коштів, які в свою чергу дадуть прибуток розміром $f_3(x_3)$. Наявний залишок ($\mathbf{X}$–x_3) виділимо першому та другому проектам, які при оптимальному розподілі дадуть прибуток $F_2(X - x_3)$ грош. од. Тоді максимальний прибуток, отриманий від розподілу інвестицій між першими трьома проектами буде:

$$F_3(X) = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(x_3) + F_2(X - x_3)] \qquad (1.5)$$

Розглянемо загальний випадок розподілу інвестицій для перших k проектів. Нехай $k-$тому проекту виділено x_k одиниць інвестицій, які забезпечать йому прибуток розміром $f_k(x_k)$.Залишок інвестицій ($\mathbf{X}$–$x_к$) передамо першим ($к$-1) проектам, де вони при оптимальному розподілі принесуть фірмі $F_{k-1}(X - x_k)$ прибутку. При цьому фірма отримає сумарний максимальний прибуток рівний:

$$F_k(X) = \max_{0 \le x_k \le X}[f_k(x_k) + F_{k-1}(X - x_k)] \qquad (1.6)$$

Отже, ми вивели рекурентне співвідношення (1.6), яке є рівнянням Р. Беллмана для задачі (1.1)–(1.2).

Приклад 1.1.

Фірма розглядає можливість вкладення коштів у три інвестиційні проекти у розмірі 200 млн. грн. Необхідно розрахувати оптимальний варіант вкладень коштів, який забезпечить фірмі отримання максимального прибутку.

Таблиця 1.1

Розмір інвестицій, X млн.грн.	*Приріст доходів*		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
100	70	90	60
200	150	140	170

Розв'язання. Для знаходження оптимального варіанту вкладень коштів використаємо функціональне рівняння (1.6). Розрахунки проведемо у три етапи. Насамперед знайдемо оптимальне значення варіанту вкладень для першого проекту. Оскільки $F_1(X) = \max\limits_{0 \le x_1 \le X}[f_1(x_1)] = f_1(X)$, то переходимо до визначення оптимального значення розподілу інвестицій , виділених двом першим проектам разом. Для цього використаємо формулу $F_2(X) = \max\limits_{0 \le x_2 \le X}[f_2(x_2) + F_1(X - x_2)]$, у якій надамо x_2 усіх можливих значень (100; 200). Розглянемо випадок розподілу інвестицій розміром 100 млн. грн. Отримаємо:

$$F_2(100) = \max_{0 \le x_2 \le X}[f_2(x_2) + F_1(100 - x_2)] = \max_{0 \le x_2 \le X}[f_2(0) + F_1(100); f_2(100) + F_1(0)] =$$
$$= \max_{0 \le x_2 \le X}[0 + 70;\ 90 + 0] = 90 \text{ млн. грн.}$$

Максимальне значення одержано за рахунок другого члена, тобто $f_2(100) + F_1(0)$. Це означає, що другому проекту слід виділити 100 млн. грн., а першому не виділяти нічого.

Аналогічно проводимо обчислення для значення вкладень 200 млн. грн.:

$$F_2(200) = \max_{0 \le x_2 \le X}[f_2(x_2) + F_1(200 - x_2)] = \max_{0 \le x_2 \le X}[f_2(0) + F_1(200);\ f_2(100) + F_1(100);$$
$$f_2(200) + F_1(0)] = \max_{0 \le x_2 \le X}[0 + 150;\ 90 + 70;\ 140 + 0] = 160 \text{ млн. грн.}$$

Одержаний результат показує, що інвестиції розміром 200 млн. грн необхідно порівно поділити між першими двома проектами.

Переходимо до третього етапу. Розрахунки проводимо аналогічно. При цьому слід враховувати отримані на другому етапі значення $F_2(X)$.

$$F_3(100) = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(x_3) + F_2(100 - x_2)] = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(0) + F_2(100); f_3(100) + F_2(0)] =$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le X}[0 + 90; 50 + 0] = 90 \text{ млн. грн.}$$

$$F_3(200) = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(x_3) + F_2(200 - x_3)] = \max_{0 \le x_3 \le X}[f_3(0) + F_2(200);\ f_3(100) + F_2(100);$$

$$f_3(200) + F_2(0)] = \max_{0 \le x_3 \le X}[0 + 160;\ 50 + 90;\ 170 + 0] = 170 \text{ млн. грн.}$$

Отже, в результаті вкладення коштів у розмірі 200 млн. грн. у три проекти фірма отримає прибуток у сумі 170 млн. грн. При цьому всі кошти рекомендується вкласти у третій проект.

1. 2. Модель оптимальної заміни устаткування

На початку планового періоду, який складається з кількох років, виробничий підрозділ має в наявності одну одиницю устаткування фіксованої кількості років експлуатації. У процесі експлуатації устаткування дає щорічний прибуток, потребує експлуатаційних витрат і має відповідну залишкову вартість, причому всі згадані характеристики залежать від віку устаткування.

У довільний рік устаткування можна зберегти чи продати по залишковій вартості й купити замість нього нове устаткування за відомою ціною, котра може змінюватися в часі. Задача полягає в тому, що для планового періоду необхідно знайти оптимальну (загальний прибуток за період) тактику заміни (збереження) даного устаткування, тобто для кожного року в плановому періоді треба прийняти рішення : зберігати наявне устаткування на даний момент або продати його й придбати нове, щоб загальний прибуток за весь плановий період був максимальним.

Для побудови економіко-математичної моделі введемо позначення: t – вік устаткування, t = 0, 1, 2, … (t=0 відповідає використанню нового устаткування; t = 1 відповідає використанню устаткування віком один рік тощо); $x(t)$ – вартість продукції, виготовленої протягом одного року на устаткуванні віком t; S (t) – залишкова вартість устаткування віком t; τ - проміжний час у плановому періоді; P - ціна нового устаткування; $u(t)$ – експлуатаційні витрати за один рік на устаткування віком t; t_0 – початковий вік устаткування ; N – плановий період.

Позначимо через $f_n\ (t)$ сумарний прибуток за останні n років планового періоду при умові, що на початку цього періоду з n років у наявності є устакування віком t, і ми дотримуємося оптимальної політики в заміні. При цьому, $n = 1$ означає останній рік планового періоду (до кінця планового періоду залишився один рік); $n = 2$ – останніх два роки планового періоду (до кінця планового періоду залишилося два роки); $n = N$ – останніх N років планового періоду, тобто відповідає всьому плановому періоду.

Припустимо, що рішення приймається в момент часу $\tau = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ (при системі відліку відносно параметра n це означає $n= N$, $N -1$,…,1). Отже, плановий період ділиться на інтервали довжиною один рік, у кожному з яких приймається рішення – зберігати чи замінити устаткування.

Якщо в момент $\tau = i$ (початок i–го року, тут $n = \tau - i$) система перебуває в стані t (вік устаткування t) і прийнято рішення “зберігати устаткування”, то це означає, що дане устаткування, попрацювавши один рік, “постаріє” й опиниться на момент $\tau = i +1$ (на початок наступного року) в стані $t +1$- буде мати вік $t +1$. Якщо на момент $\tau = i$ устаткування знаходилося в стані t і прийнято рішення “замінити устаткування”, то це означає, що в момент t наявне устаткування продається, а натомість купують нове (вік 0 років); воно працює один рік і до моменту $i +1$ система виявиться в стані 1 (устаткування віком один рік).

Заміна існуючого устаткування віком t на нове доцільна в тому випадку, коли прибуток від нового устаткування більший від старого, тобто

$$S(t) - p + x(0) - u(0) > x(t) - u(t).$$

Якщо $S(t) - p + x(0) - u(0) \le x(t) - u(t)$, то наявне устаткування слід зберегти.

У відповідності до алгоритму динамічного програмування спочатку планується останній крок, для якого приймається рішення таким чином, щоб отримати максимальний прибуток. Виходячи з того, що $f_1(t)$ - прибуток, який на останньому етапі буде дорівнювати найбільшому значенню цих двох виразів, дістанемо:

$$f_1(t) = \max \begin{cases} x(t) - u(t) & \textbf{зберегти} \\ S(t) - p + x(0) - u(0) & \textbf{замінити.} \end{cases} \qquad (1.7)$$

Оптимальним рішенням за останні (n+1) роки, при умові, що на початку цього періоду з (n+1) року є устаткування віком t, буде рішення, яке забезпечить за останніх (n+1) роки максимальний прибуток, який визначається з виразу

$$f_{n+1}(t) = \max \begin{cases} x(t) - u(t) + f_n(t+1) & \text{зберегти} \\ S(t) - p + x(0) - u(0) + f(1) & \text{замінити.} \end{cases} \qquad (1.8)$$

Співвідношення (1.7) і (1.8) встановлюють зв'язок між виразами t_n та t_{n+1}. Це рекурентні співвідношення, за якими можна знайти розв'язок задачі методом динамічного програмування.

Приклад 1.2.. До початку планового періоду в цеху встановлено устаткування. Залежність продуктивності цього устаткування від часу використання його цехом, а також залежність витрат на утримання й ремонт устаткування при різних термінах його використання наведені в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2.

Характеристика устаткування	Час, протягом якого використовується устаткування					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції, млн. грн.	100	85	75	70	70	65
Річні витрати, пов'язані з утриманням і ремонтом устаткування, млн. грн.	30	35	40	45	55	65

Витрати на придбання та встановлення нового устаткування складають 50 млн. грн. Устаткування, що замінюють, списується (залишкова вартість дорівнює нулю). Побудувати такий план заміни устаткування, за яким прибуток за даний період часу буде максимальним.

Розв'язання. Почнемо з визначення умовного оптимального розв'язку для останнього року планового періоду. Оскільки до початку планового періоду цех має нове устаткування, то вік устаткування до початку останнього етапу може бути 1, 2, 3 або 4 роки.

Для кожного значення t знайдемо умовно оптимальний розв'язок і відповідно значення функції $f_1(t)$ на основі формули (1.7).

$$f_1(1) = \max\begin{Bmatrix} 85-35 \\ 100-30-50 \end{Bmatrix} = 50 \quad \text{зберегти;}$$

$$f_1(2) = \max\begin{Bmatrix} 75-40 \\ 100-30-50 \end{Bmatrix} = 35 \quad \text{зберегти;}$$

$$f_1(3) = \max\begin{Bmatrix} 70-45 \\ 100-30-50 \end{Bmatrix} = 25 \quad \text{зберегти;}$$

$$f_1(4) = \max\begin{Bmatrix} 65-55 \\ 100-30-50 \end{Bmatrix} = 20 \quad \text{замінити.}$$

Вік устаткування до початку четвертого року планового періоду (n =2) може дорвнювати t=1, 2, 3. Користуючись формулою (1.8), знайдемо:

$$f_2(1) = \max\begin{Bmatrix} 85-35+35 \\ 100-30-50+50 \end{Bmatrix} = 35 \quad \text{зберегти;}$$

$$f_2(2) = \max\begin{Bmatrix} 75-40+25 \\ 100-30-50+50 \end{Bmatrix} = 70 \quad \text{замінити;}$$

$$f_2(3) = \max\begin{Bmatrix} 70-45+20 \\ 100-30-50+50 \end{Bmatrix} = 70 \quad \text{замінити.}$$

Можливий вік устаткування до початку року (n = 3) може дорівнювати t = 1, 2. На основі формули (1.8) розрахуємо значення f_3 (t):

$$f_3(1) = \max\begin{Bmatrix} 85-35+70 \\ 100-30-50+85 \end{Bmatrix} = 120 \quad \text{зберегти;}$$

$$f_3(2) = \max\begin{Bmatrix} 75-40+70 \\ 100-30-50+85 \end{Bmatrix} = 105 \quad \text{зберегти.}$$

Аналогічно розглянемо випадок для n = 4, тобто t = 0. Отже, проблеми вибору немає: устаткування треба зберегти, а

$$f_5(0) = 100 - 30 + 120 = 190.$$

Враховуючи, що вік устаткування до початку планового періоду t = 0, і користуючись отриманими розрахунковими результатами в оберненому порядку їх формування, побудуємо оптимальну тактику заміни устаткування (табл. 1.3).

Таблиця 1.3.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Періоди</td><td colspan="5">Роки планового періоду</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Вік устаткування</td><td>1
2
3
4</td><td>зберегти</td><td>зберегти</td><td>зберегти
зберегти</td><td>зберегти
замінити
замінити</td><td>зберегти
зберегти
зберегти
замінити</td></tr>
<tr><td colspan="2">Оптимальний розв’язок</td><td>зберегти</td><td>зберегти</td><td>зберегти</td><td>замінити</td><td>зберегти</td></tr>
</table>

Отже, оптимальний розв’язок даної задачі буде таким: заміни устаткування проводити на початку четвертого періоду.

Тема 3. Моделі теорії масового обслуговування та їх використання в системі управління

3. 1. Основні елементи системи масового обслуговування та їх характеристики

У виробничій діяльності підприємств та організацій дуже часто зустрічаються такі випадки, коли виникає необхідність в обслуговуванні вимог або заявок, які надійшли у деяку систему. Інколи системи обслуговування мають обмежені пропускні можливості для задоволення попиту, що приводить до утворення черг, наприклад, обслуговування і ремонт устаткування та механізмів, завантаження транспортних засобів готовою продукцією тощо.

Задачами теорії масового обслуговування являються аналіз та дослідження явищ та процесів, що виникають в системах масового обслуговування (СМО). Одним із основних завдань теорії є визначення таких характерних ознак системи, які забезпечують задану якість її ефективного функціонування: мінімальний час очікування, мінімальна середня довжина черги тощо.

Довільна СМО складається із вхідного потоку, черги, апаратів (каналів) обслуговування та вихідного потоку (рис. 3.1). Наприклад, надходження заявок на ремонт устаткувань – вхідний потік; очікування ремонту – черга; ремонтні бригади – апарати обслуговування; відремонтоване устаткування – вихідний потік.

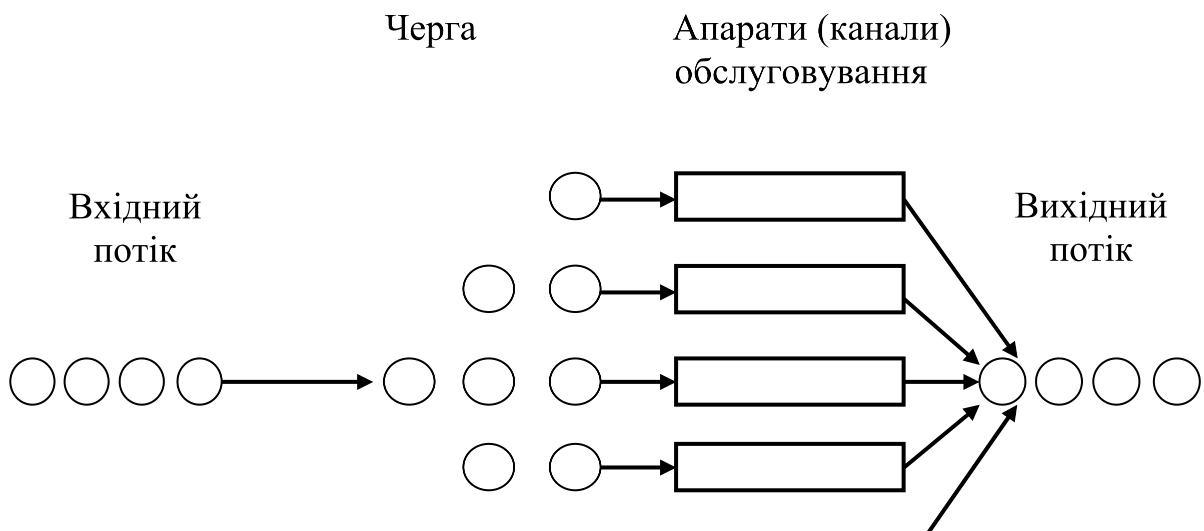


Рис. 3.1.

Економічна ефективність СМО буде залежати від вхідного потоку, кількості каналів обслуговування та організації системи обслуговування. Так, будівельна організація в своєму розпорядженні має для транспортування землі 5 екскаваторів і 15 автомашин. У даному випадку маємо декілька варіантів вивезення землі із будівельних об'єктів. Можна всі екскаватори зосередити на одному об'єкті, тоді ефективно будуть використовуватися транспортні засоби, але буде втрачатися час на переїзд екскаваторів від одного об'єкта до іншого. Якщо наявний парк екскаваторів рівномірно розподілити між будівельними об'єктами, тоді екскаватори будуть простоювати в очікуванні транспортних засобів. Отже, в кожному окремому випадку необхідно вибирати ту або іншу форму організації обслуговування. Дуже часто як критерій ефективності використовується мінімум повної вартості очікування вимог в черзі та простою каналів обслуговування.

Припустимо, що в систему входять S каналів обслуговування. Позначимо: M_1 - середнє число вимог в черзі; M_2 - середнє число вільних каналів обслуговування; C_1 - вартість очікування однієї вимоги за одиницю часу; C_2 - вартість простою одного апарата за одиницю часу. Враховуючи введені позначення, повна вартість витрат, пов'язаних з очікуванням і простоєм за інтервал часу T, буде:

$$F(S) = (C_1M_1 + C_2M_2)T \to \min . \qquad (3.1)$$

Довільна СМО має свою відповідну організаційну структуру. За своєю структурою вони можуть бути одно- чи багатоканальними. Наприклад, в цеху певний вид устаткування обслуговує одна бригада – система одноканальна; те саме, тільки три бригади - система багатоканальна.

Іншою класифікаційною ознакою є час перебування вимог у системі до початку обслуговування. На основі даної ознаки всі системи можна поділити на три групи: системи з необмеженим часом очікування, системи з відновленням (втратами) та системи змішаного типу.

У системі з відмовою будь-яка вимога, заставши всі канали зайнятими, покидає її. В системах з необмеженим часом очікування вимога, заставши всі канали зайнятими, вимушена очікувати черги до тої пори, поки один із них не звільниться. Системи змішаного типу характеризуються тим, що вимоги, які надійшли, знаходяться в черзі обмежений час, після того, не дочекавшись закінчення обслуговування, залишають систему. Системи з відмовленнями та очікуваннями є частковими випадками систем змішаного типу.

Отже, тип задачі масового обслуговування визначається за такими ознаками:

1) характеристикою вхідного потоку;
2) характером розподілу часу обслуговування вимог;
3) числом каналів обслуговування;
4) порядком утворення черги вимог та обслуговування;
5) характеристикою вихідного потоку.

Відомо, що процес надходження вимог носить випадковий характер, і його математична модель є цілочисельною функцією $x(t)$, яка дорівнює числу вимог, що надходять в систему за проміжок часу $(0, t)$. На практиці дуже часто використовують простий потік вимог, який має такі властивості: стаціонарність, відсутність наслідків і ординарність.

Властивість стаціонарності полягає в тому, що імовірність надходження будь-якої кількості вимог протягом певного часу не залежить від початку відліку часу, а тільки від довжини цього проміжку. Отже, імовірність появи k вимог протягом проміжку часу від t_0 до $t_0 + t$ не залежить від t_0 і є функцією тільки параметрів k і t.

Властивість відсутності наслідків полягає в тому, що ймовірність надходження k вимог протягом проміжку часу $(t_0, t_0 + t)$, не залежить від того, скільки було вимог і як вони поступали до цього проміжку. Ординарність потоку вимог виражається умовою практичної неможливості появи двох або декількох вимог в один і той самий момент.

Порівнюючи властивості простого потоку із властивостями розподілу Пуассона, можна переконатись в їх ідентичності. Тому математично простий потік можна представити як пуассонівський розподіл:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = \overline{1, m}, \qquad (3.2)$$

де $P_k(t)$- ймовірність надходження k вимог за проміжок часу $(0; t)$; λ - інтенсивність потоку, тобто середнє число вимог за одиницю часу.

Задачі масового обслуговування можна розглядати в двох аспектах: для діючих і для проектних систем.

У системі управління виробництвом, як правило, необхідно вміти кількісно оцінити ефективність функціонування діючої системи обслуговування з очікуванням. Для цього необхідно розрахувати середні значення параметрів:

1) кількість вимог у черзі та системі;
2) час очікування вимог у черзі;
3) число незайнятих каналів обслуговування;
4) коефіцієнти простою у черзі та системі;
5) коефіцієнти простою каналів обслуговування.

3. 2. Кількісні оцінки одно- та багатоканальних систем обслуговування з обмеженим числом вимог

Розглянемо систему, яка складається з S каналів обслуговування. Кожний із каналів може одночасно обслужити тільки одну вимогу. В систему поступає обмежений потік вимог (не більше m вимог) з інтенсивністю λ. Вимога, яка надійшла в систему і застала хоча б один канал вільним, відразу поступає на обслуговування. Якщо всі канали зайняті, вимога ставиться в чергу і обслуговується після того, коли будуть задоволені всі вимоги, що поступили раніше. Середнє число вимог, яке обслуговується одним каналом за одиницю часу, становить μ. Отже, інтенсивність обслуговування буде $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Час обслуговування розподіляється за показниковим законом.

У даному випадку число вимог в системі обмежено величиною m і, як наслідок, система може знаходитися в довільний момент часу в одному з $m+1$ станів.

Розглянемо розрахунок кількісних оцінок у випадку одноканальної системи обслуговування з обмеженим числом вимог.

1. Ймовірність того, що в системі знаходиться k вимог

$$P_k = (m - k + 1)\rho P_{k-1}, \quad 1 \le k \le m. \tag{3.3}$$

2. Ймовірність того, що в системі немає жодної вимоги

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{m!\,\rho^k}{(m-k)!}}. \tag{3.4}$$

3. Математичне сподівання числа вимог у черзі (середня довжина черги)

$$M_r = \sum_{k=S+1}^{m} (k - S) P_k . \tag{3.5}$$

4. Математичне сподівання числа вимог у черзі та на обслуговуванні (в системі)

$$M_C = \sum_{k=1}^{m} k P_k . \tag{3.6}$$

5. Математичне сподівання простою каналів обслуговування

$$M_S = \sum_{k=0}^{m} (S - k) P_k . \tag{3.7}$$

6. Середній час очікування вимог у черзі

$$\bar{t}_{0r} = \frac{M_r}{\lambda (m - M_C)} = \frac{M_r}{\mu (s - M_S)} . \tag{3.8}$$

7. Коефіцієнт простою вимог у черзі

$$\alpha_r = \frac{M_r}{m} . \tag{3.9}$$

8. Коефіцієнт простою вимог у системі

$$\alpha_C = \frac{M_C}{m} . \tag{3.10}$$

9. Коефіцієнт простою каналів обслуговування

$$\alpha_S = \frac{M_S}{s} . \tag{3.11}$$

Перейдемо до розрахунку параметрів багатоканальної системи з обмеженим числом вимог обслуговування. Порівняно з одноканальною системою виняток складають тільки P_1 і P_2. Ці величини розраховуються відповідно до формул:

$$P_k = a_k P_0 ; \tag{3.12}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{m - k + 1}{k} \rho a_{k-1} \ \text{при}\ 1 \le k < S; \\ \dfrac{m - k + 1}{S} \rho a_{k-1} \ \text{при}\ S \le k \le m, \end{cases} \tag{3.13}$$

причому, $a_0 = 1$.

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{m} a_k} . \tag{3.14}$$

Інші параметри оцінюються за формулами (3.5) – (3.11).

<u>Приклад</u> 3.1. У цеху є сім однотипних устаткувань, які працюють незалежно один від одного. Неполадки, що виникають з

устаткуванням, носять випадковий характер і розподіляються за законом Пуассона. Протягом однієї години в середньому із ладу виходить два устаткування. Ці неполадки ліквідовуються одним механіком, який може обслужити протягом однієї години 8 вимог.

Необхідно розрахувати: коефіцієнти простою вимог в черзі та системі; коефіцієнт простою механіка та середній час очікування вимог в черзі.

Розв'язання. Відповідно до введених позначень та умови задачі маємо: $S=1; \lambda=2; \mu=8; m=7$.

Знайдемо інтенсивність обслуговування $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{2}{8}=0,25$.

За допомогою (314) визначимо P_0:

$$P_0=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{7}\frac{7!0,25^k}{(7-k)!}}=\frac{1}{1+7!\left(\frac{0,25}{6!}+\frac{0,25^2}{5!}+\cdots+\frac{0,25^6}{1!}+\frac{0,25^7}{0!}\right)}=0,063.$$

Таким чином, ймовірність того, що в системі не буде жодної вимоги або, те саме, всі устаткування справні, буде 0,063. На основі (3.3) знайдемо

$$P_k=(7-k+1)0,25P_{k-1},\quad k=\overline{1,7};$$

$$P_1=(7-1+1)0,25P_0=0,11;\ P_2=(7-2+1)0,25P_1=0,165;$$

$$P_3=(7-3+1)0,25P_2=0,206;\ P_4=(7-4+1)0,25P_3=0,206;$$

$$P_5=(7-5+1)0,25P_4=0,154;\ P_6=(7-6+1)0,25P_5=0,077;$$

$$P_7=(7-7+1)0,25P_6=0,019.$$

Обчисливши значення P_k, можемо перейти до визначення основних числових характеристик заданої системи обслуговування. Так, математичне сподівання числа вимог у черзі

$$M_r=\sum_{k=2}^{7}(k-1)P_k=P_2+2P_3+3P_4+4P_5+5P_6+6P_7=2,31.$$

Отже, в середньому у черзі простоює 2,31 вимог. Коефіцієнт простою вимог в черзі

$$\alpha_r=\frac{M_r}{m}=\frac{2,31}{7}=0,33.$$

Тобто, 33 % робочого часу через неполадки устаткування простоює в черзі, чекаючи на обслуговування.

Визначимо коефіцієнт простою устаткувань в системі. Для цього спочатку необхідно обчислити математичне сподівання числа вимог системі (в черзі та обслуговуванні):

$$M_C = \sum_{k=1}^{7} kP_k = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6 + 7P_7 = 3{,}247.$$

Таким чином, у середньому в черзі та на обслуговуванні знаходиться 3,247 устаткування.

Коефіцієнт простою устаткування в системі становить:

$$\alpha_C = \frac{M_C}{m} = \frac{3{,}247}{7} = 0{,}46.$$

Для визначення коефіцієнта простою каналів обслуговування необхідно знайти математичне очікування простою каналів обслуговування в системі. У випадку одноканальної системи обслуговування отримаємо

$$M_S = \sum_{k=0}^{1} (1-k)P_k = P_0 = 0{,}063.$$

Отже,

$$\alpha_S = \frac{M_S}{s} = 0{,}063.$$

Таким чином, у середньому механік простоює 6,3 % свого робочого часу, що свідчить про його високу завантаженість.

Знайдемо середній час очікування вимог у черзі:

$$\bar{t}_{0r} = \frac{M_r}{\lambda(m - M_C)} = \frac{2{,}31}{2(7 - 3{,}247)} = 0{,}3078 \text{ год} \approx 18{,}47 \text{ хв}.$$

Як бачимо, при існуючій організації проведення ремонтних робіт устаткування велику частину робочого часу витрачають на усунення неполадок, що призводить до значних економічних витрат. Зменшити витрати можна за допомогою збільшення числа каналів обслуговування, тобто числа механіків. Таким чином, виникає задача багатоканальної системи обслуговування.

Припустимо, що в цеху працює два механіка з однаковою продуктивністю. Вхідні параметри системи залишаються незмінними.

Для визначення числових характеристик багатоканальної системи насамперед визначимо за допомогою (3.12)–(3.14) ймовірність того, що в систему надійде k вимог $(1 \le k \le 7)$. Відомо, що

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{16} = 0{,}125, \quad a_0 = 1, \quad S = 2.$$

Знайдемо із формули (3.13) значення коефіцієнтів a_k:

$a_1 = \frac{7-1+1}{1}\rho a_0 = 0{,}875$; $a_2 = \frac{7-2+1}{2}\rho a_1 = 0{,}32813$;

$a_3 = \frac{7-3+1}{3}\rho a_2 = 0{,}10254$; $a_4 = \frac{7-4+1}{4}\rho a_3 = 0{,}02563$;

$a_5 = \frac{7-5+1}{5}\rho a_4 = 0{,}00481$; $a_6 = \frac{7-6+1}{6}\rho a_5 = 0{,}0006$;

$a_7 = \frac{7-7+1}{7}\rho a_6 = 0{,}0000375$.

Тоді

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m} a_k} = 0{,}4279;$$

$P_1 = a_1 P_0 = 0{,}37441$; $P_2 = a_2 P_0 = 0{,}14041$; $P_3 = a_3 P_0 = 0{,}0439$;

$P_4 = a_4 P_0 = 0{,}011$; $P_5 = a_5 P_0 = 0{,}00206$; $P_6 = a_6 P_0 = 0{,}00026$;

$P_7 = a_7 P_0 = 0{,}00002$.

Обчислимо значення M_r, M_C і M_S:

$$M_r = \sum_{k=3}^{7}(k-2)P_k = P_3 + 2P_4 + 3P_5 + 4P_6 + 5P_7 = 0{,}073;$$

$$M_C = \sum_{k=1}^{7} kP_k = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6 + 7P_7 = 0{,}843;$$

$$M_S = \sum_{k=0}^{2}(2-k)P_k = 2P_0 + P_1 = 1{,}23.$$

Коефіцієнт простою устаткування в очікуванні ремонту

$$\alpha_r = \frac{M_r}{m} = \frac{0{,}073}{7} = 0{,}0104.$$

Коефіцієнт простою устаткування в системі

$$\alpha_C = \frac{M_C}{m} = \frac{0{,}843}{7} = 0{,}1204.$$

Коефіцієнт простою механіків

$$\alpha_S = \frac{M_S}{S} = \frac{1{,}23}{2} = 0{,}615.$$

Середній час очікування вимог у черзі

$$\bar{t}_{0r} = \frac{M_r}{\lambda(m - M_C)} = \frac{0{,}073}{2(7-0{,}843)} = 0{,}0059\ \textit{год} \approx 0{,}36\ \textit{хв}.$$

Отже, використання додатково на ремонті ще одного механіка дозволить ефективніше використовувати у виробничому процесі наявний парк устаткувань. У той же час 61,5% свого робочого часу механіки будуть простоювати. Тоді доцільно розглянути варіант збільшення числа устаткування, закріпленого за ними.

3. 3. Оптимізація системи масового обслуговування із змінним числом каналів

Методика визначення оптимального числа каналів обслуговування полягає в наступному:

1. Для заданої системи масового обслуговування послідовно розглядається різна кількість каналів обслуговування $(S = 1,2,\dots,n)$.
2. Для кожної кількості каналів розраховуються основні параметри системи обслуговування, в тому числі середній час простою вимоги в системі i_S.
3. Встановлюється середня вартість витрат c_r внаслідок простою вимог за одиницю часу.
4. Визначаються витрати на утримання одного каналу обслуговування c_1 за одиницю часу.
5. Розраховуються витрати, пов'язані з простоєм вимог при кількості каналів s за період r:

$$L_{TS} = C_T \bar{t}_S \lambda T .$$

6. Обчислюються сумарні витрати на утримання s каналів обслуговування за період r:

$$L_{kS} = C_k S T .$$

7. Знаходять сумарні витрати в системі обслуговування при різній кількості каналів:

$$L_{kS} = L_{TS} + L_{kS} .$$

8. Вибирають мінімальні витрати $L = \min\limits_{s}\{L_S\}$, яким відповідає оптимальне значення числа каналів обслуговування.

3. 4. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Привести схематичну структуру системи масового обслуговування.
2. Назвати ознаки, за допомогою яких визначається тип задачі масового обслуговування.
3. Що таке простий потік вимог? Назвати основні його властивості.
4. Якими основними параметрами характеризуються системи масового обслуговування?
5. Записати формули для розрахунку кількісних оцінок одноканальної системи з обмеженим числом вимог.
6. У чому спільність і відмінність кількісних оцінок одно- та багатоканальних систем з обмеженим числом вимог?
7. Привести алгоритм задачі оптимізації системи масового обслуговування зі змінним числом каналів.
8. З допомогою якого розподілу можна представити простий потік?
9. Записати формули для розрахунку кількісних оцінок багатоканальної системи з обмеженим числом вимог.
10. Розв'язати приклад 3.1, якщо $\lambda = 4; \mu = 12; m = 5; S = 1$ і $S = 3$.

Тема 4. Основи сіткового моделювання

4. 1. Основи сіткового моделювання

Кількісний аналіз виконання виробничих програм, або комплексу робіт в основному залежить від наступних чинників: правильність прийнятих рішень, точність їх виконання, методів контролю і дій. Схематично це можна представити з допомогою наступної схеми (рис. 4.1).

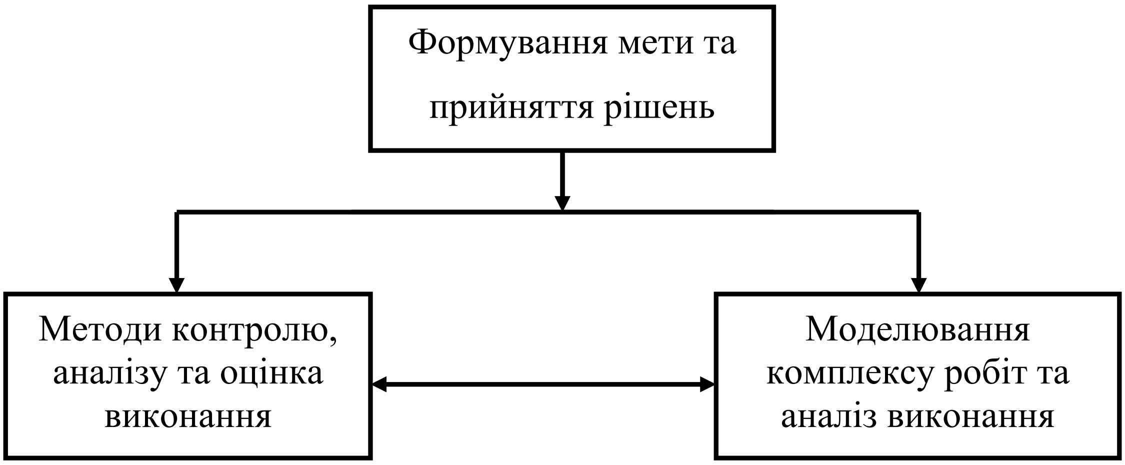


Рис.4.1.

У приведеній замкнутій схемі початковими умовами є визначення мети та прийняття рішень із врахуванням основних параметрів виробничої програми. Для досягнення поставленої мети підприємець, на основі прийнятих рішень, формує логічну взаємозв'язану виробничу програму, і у відповідності з нею здійснює розподіл наявних ресурсів та аналізує в динаміці хід її виконання. Програма представляє собою сукупність логічно взаємозв'язаних робіт або операцій, які необхідно виконувати в певному порядку, щоб досягти поставленої мети. Операції логічно впорядковані в тому розумінні, що одних не можна починати, поки не будуть завершені інші. Математичним апаратом розв'язку такого класу задач може бути сіткове моделювання.

Сіткове моделювання та управління програми включає в себе три основні етапи: структурне моделювання, календарне планування і оперативне управління.

Етап структурного моделювання починається з розбиття календарної програми на чітко визначені роботи (операції). Після цього визначаються оцінки тривалості робіт і будується сіткова модель, кожна дуга якої відображає роботу. Побудована таким чином сіткова модель у цілому є графічним представленням взаємозв'язаних робіт програми.

На етапі структурного моделювання процес побудови сіткової моделі дає можливість детально проаналізувати всі роботи і внести покращення в структуру програми ще до початку її реалізації.

Кінцевою метою етапу календарного планування являється побудова графіку, який визначає моменти початку та закінчення кожної роботи, а також її взаємозв'язки з іншими роботами.

Крім цього календарний графік повинен давати можливість виявляти ті критичні роботи (з точки зору часу), яким необхідно приділяти особливу увагу, щоб завершити програму в директивний термін. Відносно некритичних робіт календарний план повинен дозволяти визначити їхні резерви часу, що можна вигідно використати при затримці виконання таких робіт, або з позиції ефективного використання ресурсів.

Завершальним етапом являється оперативне управління процесом реалізації програми. Цей етап включає використання моделі та календарного графіка для складання періодичних звітів про хід виконання програми. Сіткова модель піддається аналізу і у випадку необхідності коректується. У даному випадку розробляється новий календарний план виконання незавершеної частини програми.

Сіткове моделювання базується на теорії графів. В його основу покладено представлення комплексу робіт виробничих програм у вигляді графа.

Під графом (рис. 4.2) розуміється скінченна множина кілець на площині, кожне із яких з'єднане з іншими кільцями цієї множини з допомогою орієнтованих стрілок. Кільця називаються вершинами, а стрілки – дугами графа. Сітка – це граф, у якого одна вхідна й одна вихідна дуга. Шлях – це послідовність дуг графа, в якій кінець попередньої дуги ється початком наступної. Дугам сітки приписуються числа, які називаються довжинами дуг. Довжина шляху рівна сумі довжин дуг, які утворюють цей шлях. Кожний граф має декілька шляхів. Довільний суб'єкт управління можна описати однією сіткою або декількома, тобто в залежності від цього сіткове моделювання може бути одно- або багатосітковим. У той же час у залежності від числа цілей – одно- чи багатоцільовим.

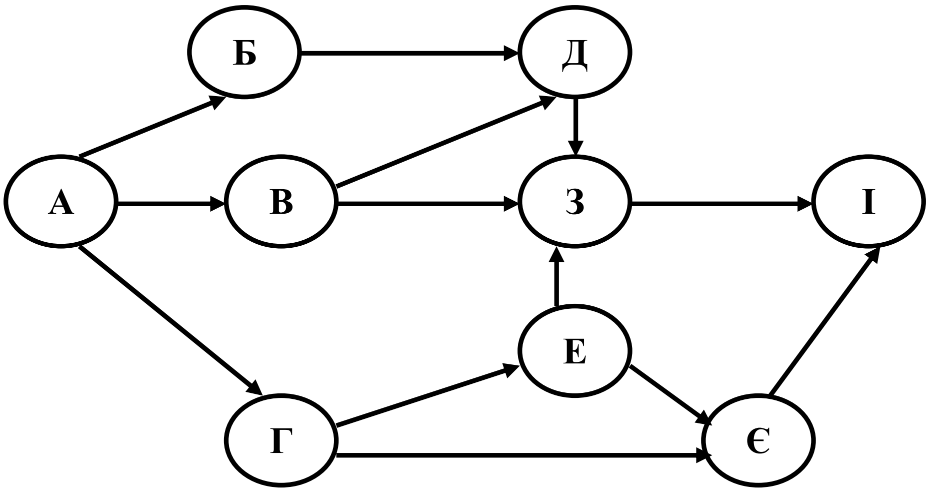


Рис. 4.2.

Відносно параметрів управління їх розділяють на системи:

1) з контролем термінів та затрат;

2) з контролем термінів, затрат і технічних характеристик;

3) з наявністю обмежень по ресурсах і без врахування їх;

4) з врахуванням обмежень по даному або декількох видах ресурсів.

Отже, основу сіткової моделі складає сітковий графік, тобто логічна модель або наглядне відображення сукупності робіт, їх результатів, а також технологічних зв'язків та залежностей між окремими роботами будь-якого комплексу операцій, які мають єдину кінцеву мету. У довільній галузі народного господарства виробничий процес представляє собою послідовне чи паралельне виконання комплексу робіт або окремих технологічних операцій. Наприклад, закінчення виготовлення деталі на токарному верстаті дає можливість почати на її основі збір агрегату.

У сіткових моделях використовується два основних логічних елементи: процес в часі та результат. Результат фіксує закінчення попередньої роботи та початок наступної, тобто він виконує функцію ланки зв'язку між окремими роботами. Тому головними складовими сіткового графіку є події та роботи. Робота вимагає затрат часу та ресурсів і на графіку її представляють з допомогою стрілки. Хвіст стрілки означає початок роботи, а вершина – кінець. Вершина стрілки завжди направлена до роботи, яка не може бути почата, поки не завершиться робота, з'єднана з хвостом стрілки (рис. 4.3).

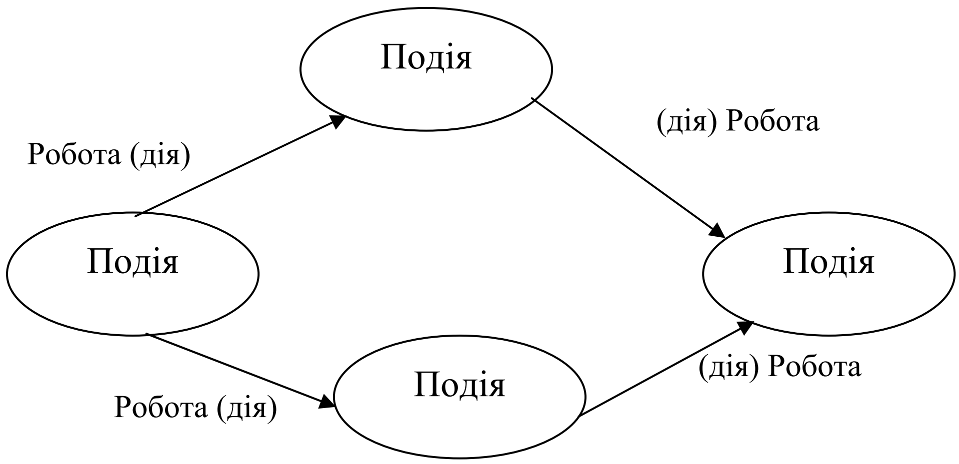


Рис. 4.3.

Робота, яка вимагає затрат часу та ресурсів, називається дійсною. Робота, яка вимагає тільки затрат часу і не потребує ресурсів, називається очікуванням. Фіктивна робота представляє собою логічний зв'язок між двома чи декількома подіями і не вимагає для свого здійснення ні затрат часу, ні ресурсів.

Сіткова модель відображає взаємозв'язки між роботами та порядок їх виконання (відношення впорядкованості чи наступності). Відношення упорядкованості між роботами задається за допомогою подій. Подія визначається як момент часу, при якому завершуються одні роботи і починаються інші.

Під подією розуміється факт закінчення однієї або декількох робіт, необхідних і достатніх для початку наступних робіт. Подія, яка не має попередніх робіт, називається вихідною (початковою) і являється відправним моментом початку робіт по даному сітковому графіку. Подія, що не має наступних робіт, називається завершальною. Тобто, в завершальній події тільки сходяться роботи, і ні одна робота з неї не виходить.

Перехід від однієї роботи до іншої, зв'язаної з нею, можливий тільки в тому випадку, коли попередня робота виконана, одержано певний результат, і як наслідок відбувається подія, що характеризує дану роботу.

Таким чином, кожна робота обмежена двома подіями: одна із них $(i-1)$ характеризує початок роботи *А*; друга i - закінчення тієї роботи (рис. 4.4). Одночасно подія i є початком роботи *Б*. При розгляді роботи А подія $(i-1)$ передує наступленню i-ої події і називається попередньою, а подія називається наступною.

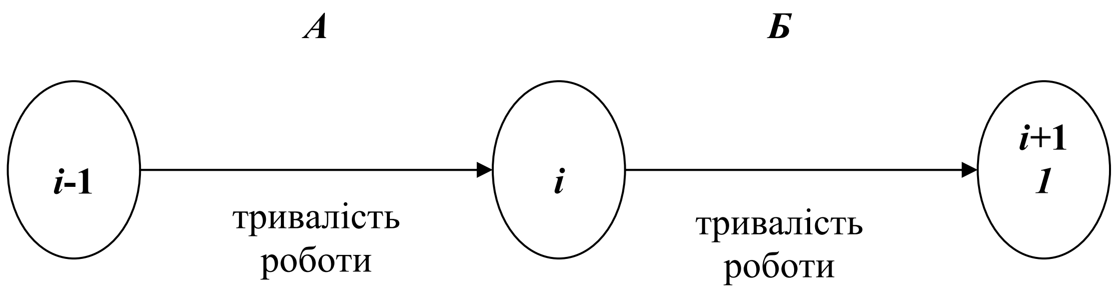


Рис. 4.4.Попередня та наступні події і роботи

Відносно другого способу сітковий граф будується зразу, без використання переліку робіт. При цьому побудову можна вести “зліва направо”, тобто починаючи із початкової події, або “справа вліво”, коли першим відображається кінцева подія, а потім всі інші роботи, які спрямовані на досягнення поставленої мети.

4. 2. Порядок і правила побудови сіткового графіка

Процес сіткового моделювання складних об’єктів та систем переважно розбивається на ряд складових частин і після цього побудовані часткові графіки об’єднуються в єдиний граф. Побудова часткових графіків та їх об’єднання вимагає дотримання наступних правил.

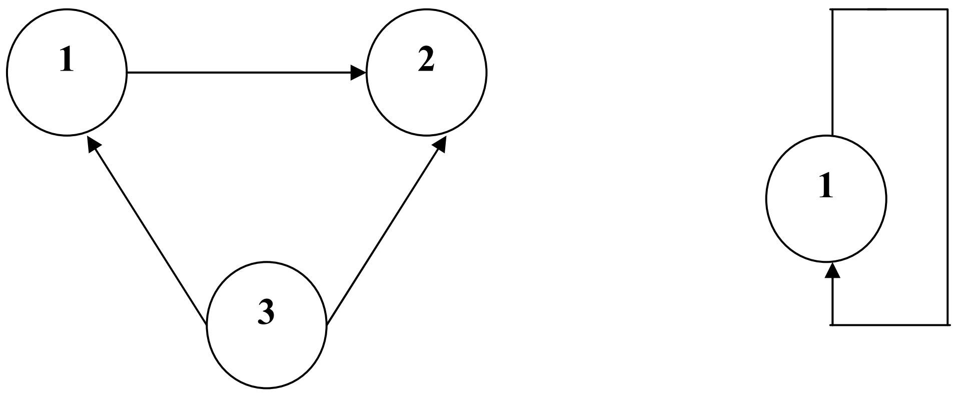
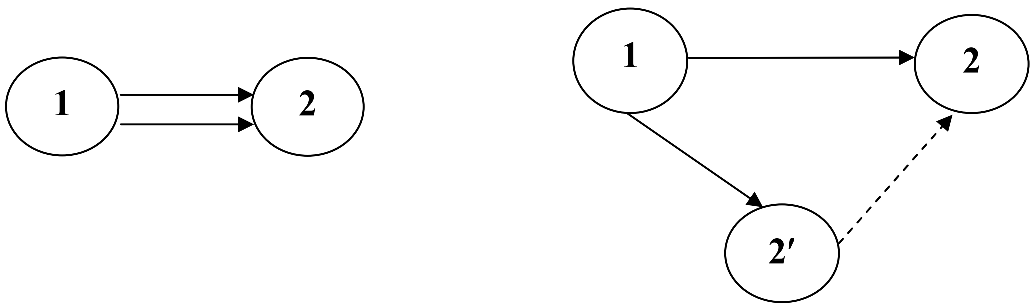


Рис. 4.5

1. Кожна робота на графіку представляється однією і тільки однією дугою (стрілкою). Ні одна із робіт не повинна появлятися в моделі двічі, тобто в сітковому графіку не має бути замкнутих контурів (рис. 4.5а) та петель (рис. 4.5б). При їх появі необхідно повернутись до аналізу запланованих робіт і усунути вказані недоліки.

2. Ні одна пара робіт не повинна визначатись однаковими початковими і кінцевими подіями. Можливість неоднозначного визначення робіт через події появляється у випадку, коли дві або більше число робіт допустимо виконувати одночасно.

При виконанні паралельних робіт (рис. 4.6а) вводиться подія $2'$ та фіктивні роботи $(2'-2)$, і одна з паралельних робіт замикається на цю фіктивну роботу (рис. 4.6 б).



а) б)

Рис. 4.6

3. Ні одна із робіт не може розпочатись, поки всі попередні до неї роботи не будуть завершені. Наприклад, із аналізу фрагменту графіка задачі моделювання оптимального плану (рис. 4.7) бачимо, що робота “розрахунок оптимального плану” (4-5) не може бути початою, поки не завершаться попередні роботи: “формування інформації” (2-4) і “розробка та відлагодження програми” (3-4).

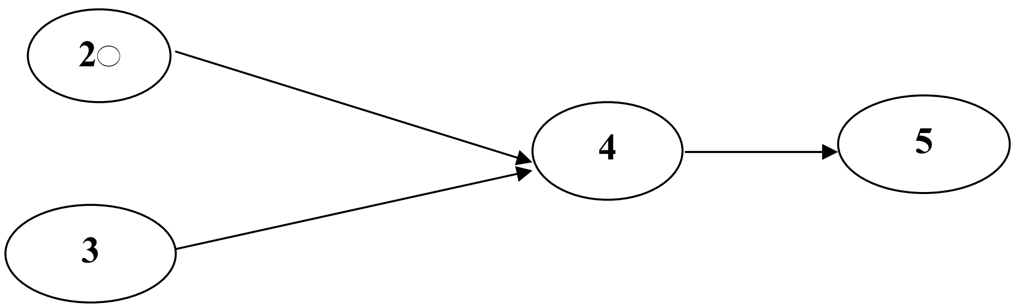
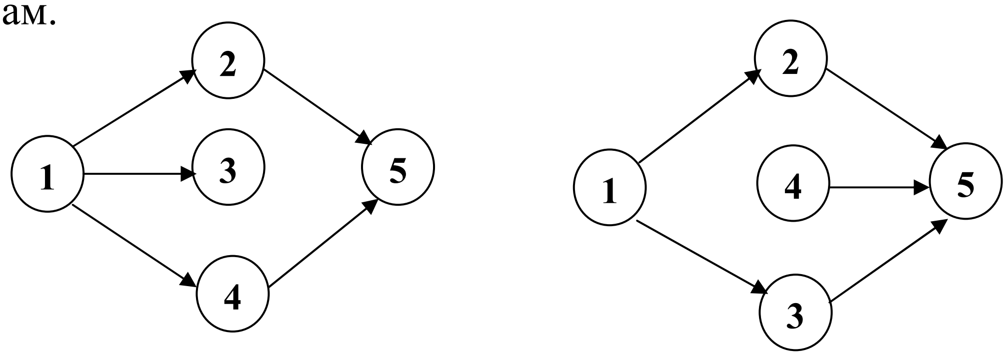


Рис. 4.7 Графічне представлення залежності наступних робіт від попередніх

4. У сітковій моделі не повинно бути “тупікових” подій, тобто подій, із яких не виходить жодна робота, за виключенням завершальної події (рис. 4.8а).

У даному випадку або робота (1-3) не потрібна і її слід відкинути, або не зауважена необхідність наступної роботи, що слідує за подією. Для усунення згаданих недоліків необхідно більш детально проаналізувати взаємозв’язки подій та робіт, властивих даним процесам.



а) б)

Рис. 4.8

5.У сітковому графіку не повинно бути “хвостових” подій (крім вихідної), в які не входить жодна робота (рис. 4.8б). Тут відсутня робота, яка передує події 4. Тому подія 4 не може відбутись, і як наслідок, не може бути виконана робота (4-5). Виявивши таку ситуацію, необхідно вказати попередню роботу, якщо вона існує, для події 4.

Наявність “тупикових” і “хвостових” подій вказує на допущену помилку, яка полягає в тому, що або пропущено роботу, або дана робота зайва. Тупиковість події 3 і 4 усувається шляхом введення додаткових фіктивних робіт.

6. При виконанні складних робіт, коли виконання деякої її частини дає можливість почати одну або декілька інших робіт, необхідно дану роботу розбити на ряд послідовних робіт, від яких беруть початок інші роботи (рис. 4.9).

При розгляді другого правила вказано на один із випадків введення фіктивних робіт і подій. Вони дають можливість (рис. 4.9) правильно відобразити логічні зв’язки, які без їх допомоги неможливо задати на графі.

Другим випадком являється відображення залежності подій, не зв’язаних із виконанням реальних робіт. Припустимо, наприклад, що роботи *А* та *Б* можуть виконуватись незалежно одна від одної, але їх

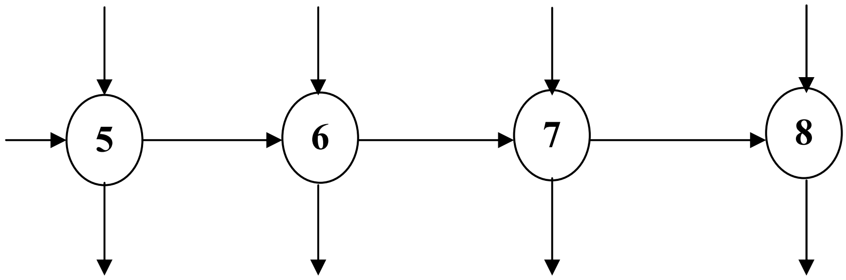


Рис. 4.9.Графічне зображення складних робіт.

виконання вимагає одного й того ж обладнання, тому робота *Б* не може початись, поки не закінчиться виконання роботи *А* на даному обладнанні. Аналіз даної ситуації показує на необхідність введення фіктивної роботи *В* (рис. 4.10а).

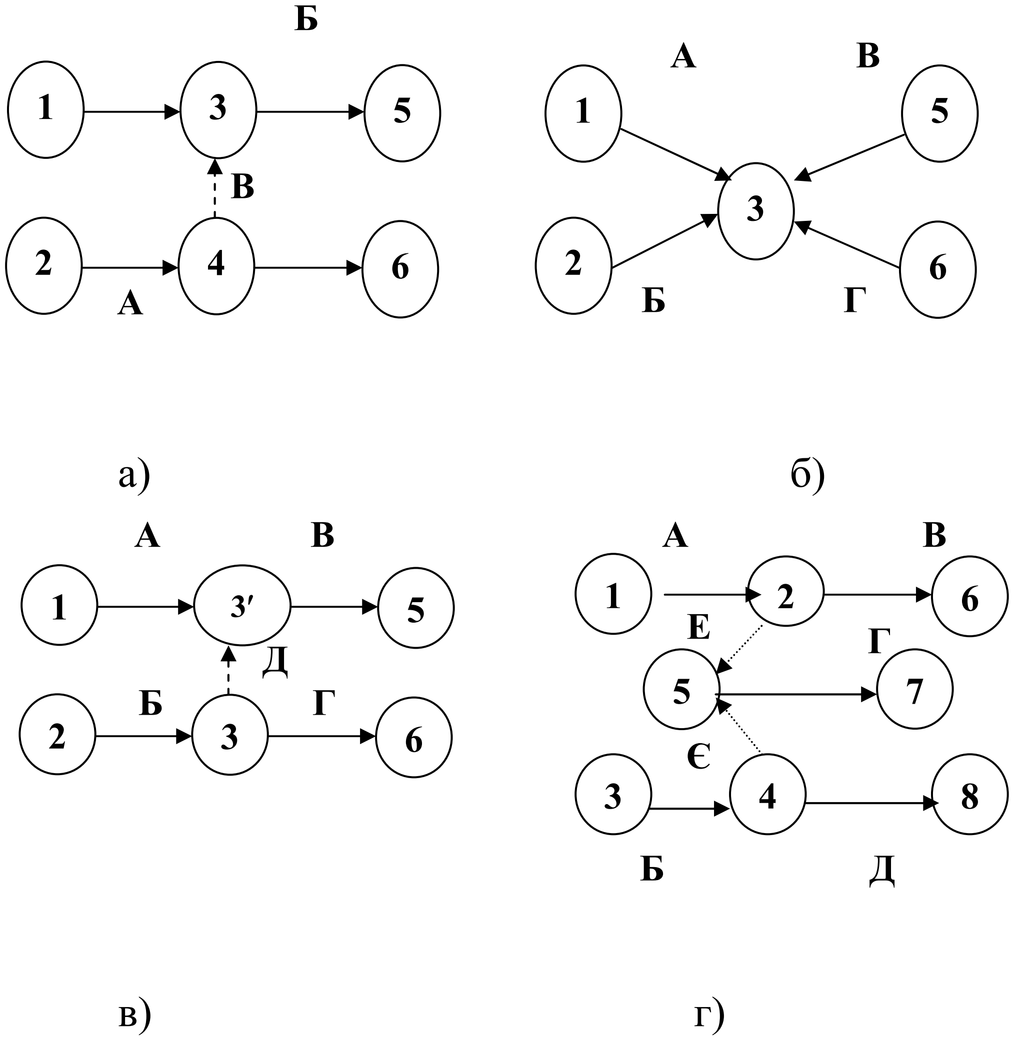


Рис. 4.10. Графічне представлення фіктивних робіт

Третій випадок введення фіктивних робіт та подій пов’язаний із неповною залежністю робіт. Припустимо, робота *В* (рис. 4.10 б) потребує для свого початку завершення робіт *А* та *Б*, але робота *Г* зв'язана тільки з роботою *Б*, а від роботи *А* незалежна. Тоді необхідно ввести фіктивну подію 3 і фіктивну роботу *Д* (рис. 4.10 в). Крім цього, проведемо аналіз іншої можливої ситуації. Припустимо, що після закінчення робіт *А* та *Б* можна почати роботу *Г*, а початок роботи *В* залежить тільки від *А* і початок *Д* залежить тільки від *Б*. У даній ситуації вводиться додаткова подія 5 і дві фіктивні роботи *Е* та *Є* (рис. 4.10г).

Четвертий випадок введення фіктивних робіт – це моделювання реальних відстрочок та очікувань, які властиві певним технологічним процесам (застигання бетону, висихання фарби, процес бродіння і т.д.). У таких ситуаціях реальна робота не проводиться, але наступний етап робіт до певного часу не може розпочатись. Для цього в сітковий графік необхідно ввести фіктивні роботи, які на відміну від попередніх мають тривалість в часі.

4.3. Процедура впорядкування сіткового графіка

Після побудови початкового варіанту сіткового графіку необхідно провести аналіз його упорядкованості. Упорядкування сіткового графіку полягає в такому розміщенні подій та робіт, при якому для будь-якої роботи попередня її подія розміщена ліворуч і має менший номер в порівнянні із завершальною дану роботу подією. Отже, в упорядкованому сітковому графіку всі стрілки (дуги) роботи направлені зліва направо, тобто від подій з меншими до подій з більшими номерами.

Побудову та упорядкування сіткового графіку розглянемо на числовому прикладі.

Приклад 4.1. Умовний технологічний процес описується з допомогою 13 подій та 23 робіт. Логічний взаємозв'язок та тривалість виконання відповідних робіт приведено в табл. 4.1. Необхідно побудувати впорядкований сітковий графік та провести відповідний аналіз на упорядкованість.

Аналізуючи наведений перелік робіт, початковою подією сіткового графіку буде подія 1, а завершальною – 12. Користуючись приведеними вище правилами, поточний варіант сіткового графіка прийме вид (рис. 4.11).

Тадлиця 4.1

№ п\п	Види роботи	Попередні роботи	Тривалість роботи, дні	№ п\п	Види роботи	Попередні роботи	Тривалість роботи, дні
1	А	-	5	13	К	В,З	9
2	Б	-	4	14	Л	Й,Ж	8
3	В	-	6	15	М	І,Ї,Л	4
4	Г	А	5	16	Н	Ж,Й	6
5	Д	А	6	17	О	Ж,Й	3
6	Е	А	3	18	П	Ж,Й	4
7	Є	Б,Е	5	19	Р	К,П	5
8	Ж	Б,Е	12	20	С	О,Р	3
9	З	Б,Е	2	21	Т	М,Н,С	8
10	І	Г	10	22	У	О,Р	2
11	Ї	Д,Е	3	23	Ф	У	7
12	Й	Д,Е	7				

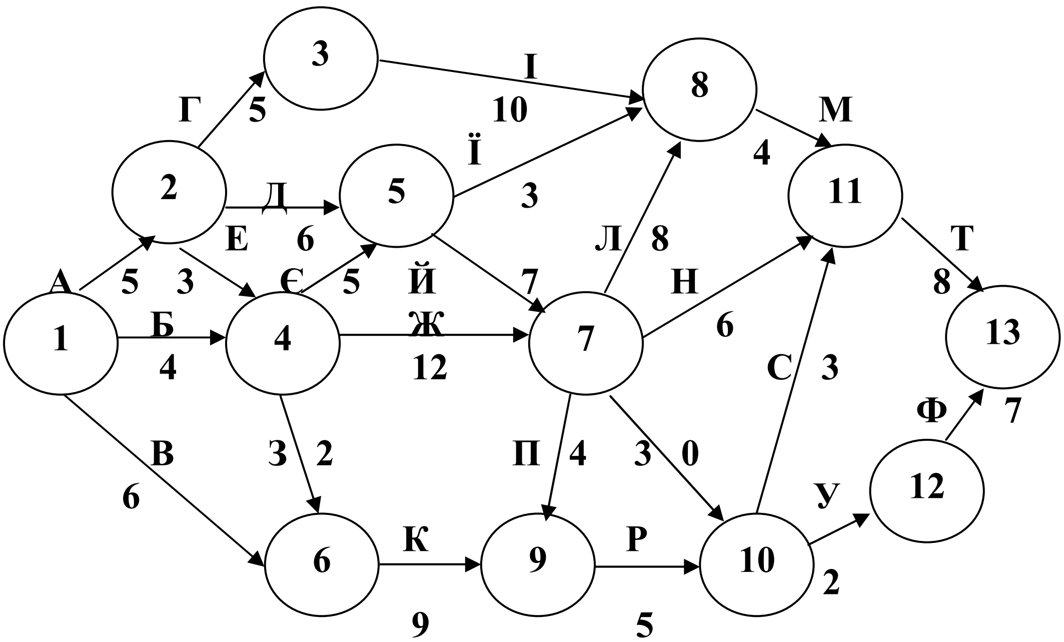


Рис. 4.11. Початковий варіант сіткового графіка

.

Попередній аналіз показує, що сітковий графік (рис. 4.11) не повністю упорядкований.

Для упорядкування графіку використаємо метод викреслювання дуг (рис. 4.12), алгоритм якого полягає в наступному:

1. На площину наносимо ряд умовно-вертикальних діаграм і позначимо їх цифрами. Подіям, які будуть поміщені в $i-$ту діаграму присвоюється $i-$й ранг.

2. На сітковому графіку знаходимо початкову подію і поміщаємо її в діаграму нуль (рис. 4.12). Тим самим даній події (в нашому прикладі подія 1) буде присвоєно нульовий ранг. Умовно викреслимо всі роботи (дуги), що виходять із подій з нульовим рангом. У даному випадку це будуть роботи (1-2), (1-3) та (1-4) (рис. 4.11).

3. У першу діаграму заносимо ті події, в яких після попереднього етапу відсутні вхідні роботи. Ранг цих подій буде рівний одиниці. В нашому прикладі такою подією буде єдина подія 2.

Отже, на графі може бути одна або декілька таких подій. Події, що мають ранг рівний одиниці, характеризуються тим, що число робіт, які з’єднують їх з подіями нульового рангу, рівне одиниці.

Умовно викреслимо всі роботи, що виходять із подій першого рангу.

4. У другу діаграму помістимо ті події, в яких на даному кроці відсутні вхідні роботи (стрілки) і надаємо їм значення рангу два. Для даних подій властивим є те, що максимальне число робіт, які з’єднують дані події з подіями нульового рангу, рівне двом. У даному випадку такими подіями є 3 і 5. Далі викреслюємо всі роботи, які виходять з подій рангом два.

5. В $i-$ту діаграму помістимо ті події (ранг їх рівний i), для яких максимальне число робіт, що з’єднує дану подію з подією нульового рангу, рівне i. Проводимо чергове викреслення робіт. Після розміщення завершальної події в останню діаграму (рис. 4.12) переходимо до аналізу упорядкованості графіка.

6. Аналіз розміщення подій у діаграмах полягає в тому, що в діаграмі з більшим номером не повинні міститись події меншої нумерації. Так у діаграмі 3 міститься подія 4, в той час, як в попередній діаграмі є подія 5. Аналогічно має місце для діаграми 5 і 4 (події 7 та 8) та 7 і 6 (події 10 та 11).

У таких випадках необхідно замінити їх нумерацію. Наприклад, замінити подію 5 та 4 в другій діаграмі, а в третій – навпаки.

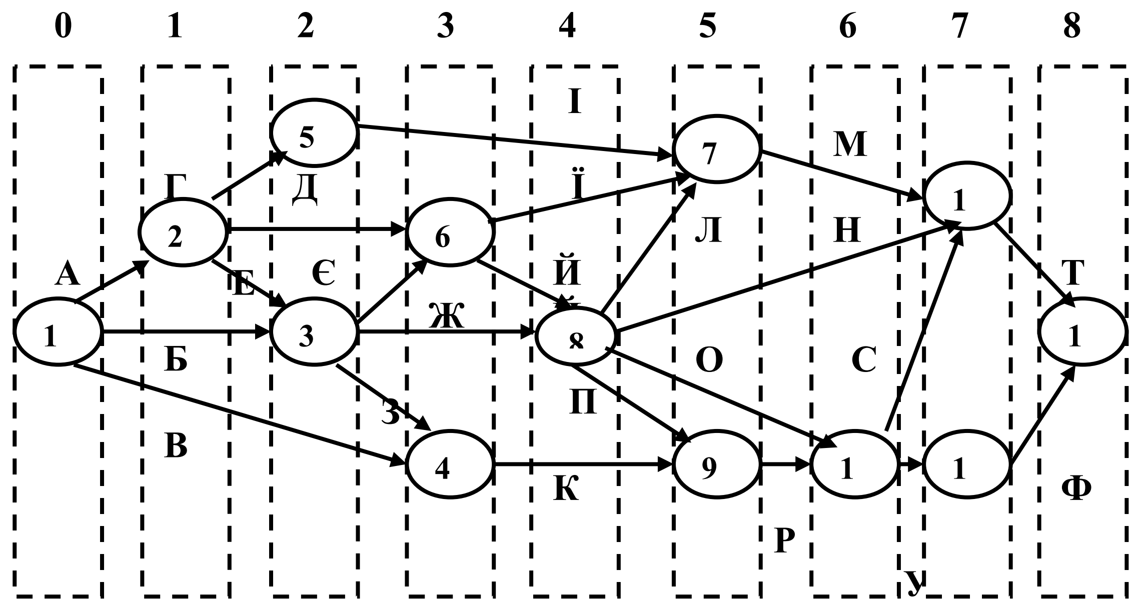


Рис. 4.12

Аналогічно необхідно провести і з подіями 7 та 8 і 10 та 11. Тим самим буде виконане впорядкування подій за рангом.

7. Після завершення розподілу всіх подій за рангом необхідно, щоб події одного рангу мали нумерацію зверху донизу. Аналіз приведеного прикладу показує, що даний пункт не виконується для другої (події 4, 3) і третьої (події 6, 5) діаграм. Для приведення у відповідність поміняємо місцями нумерацію в згаданих діаграмах. У результаті виконання приведених вище пунктів одержимо упорядкований сітковий графік (рис. 4.13).

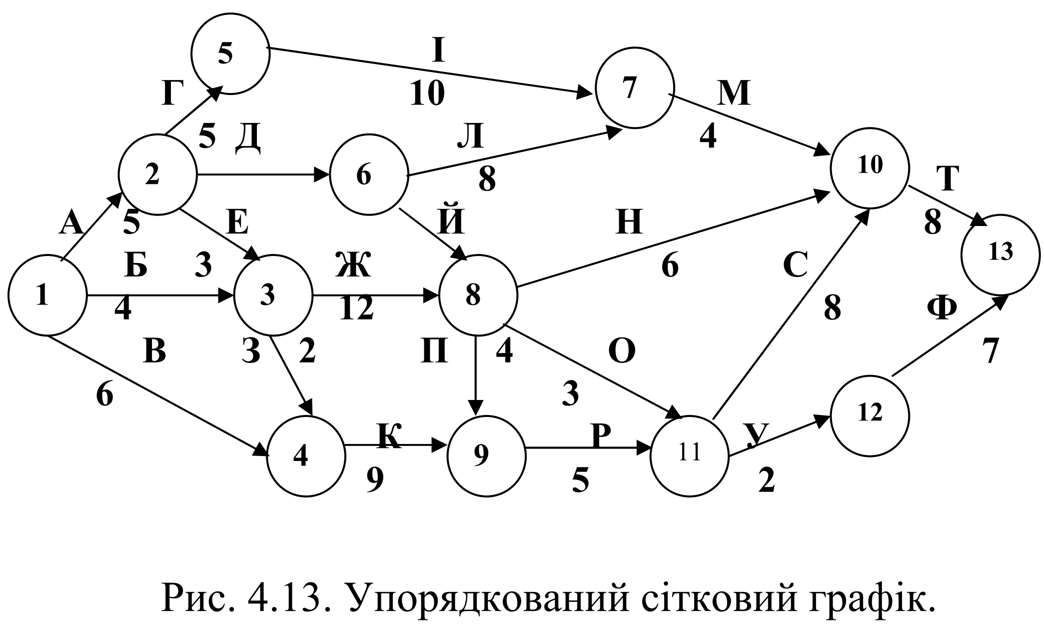


Рис. 4.13. Упорядкований сітковий графік.

4. 4. Часові характеристики сіткових графіків

Побудова упорядкованої сіткової моделі являється лише першим етапом для формування календарного плану виконання комплексу робіт. Наступним етапом сіткового моделювання є проведення аналізу графіка відносно часових параметрів.

Перш ніж перейти до викладу методики аналізу часових параметрів сіткових графіків, розглянемо поняття критичного шляху. Після побудови сіткового графіку для всіх названих робіт встановлюється тривалість їх виконання. Надалі дана інформація буде складати основу для розрахунків шляхів та інших параметрів графіка. Під шляхом розуміємо довільну неперервну послідовність робіт на сітковому графіку. Розрізняють в основному шляхи чотирьох видів, які відрізняються один від одного тривалістю (довжиною). Довжина довільного шляху сіткового графіку між подіями i та j (позначимо її через L_{ij}) рівна сумі тривалості його складових робіт.

Шлях, початок якого співпадає з початковою подією, а кінець - із завершальною подією сіткового графіку, називається повним. Шлях від початкової події до даної події графіка називається попереднім цій події, а шлях, який з'єднує дану подію із завершальною, називається наступним для даної події. Шлях, який з'єднує на графіку дві події i-ту та j-ту (крім початкової та завершальної), називається шляхом між подіями. Шлях, який виражає найбільш тривалу послідовність на сітковому графіку, тобто найбільший повний шлях, будемо називати критичним шляхом ($L_{кр}$). Роботи та події, розміщені на критичному шляху, називаються критичними. Зменшення або збільшення тривалості критичних робіт відповідно зменшує або збільшує загальну тривалість виконання виробничої програми. Якщо тривалість будь-якого шляху мало відрізняється від тривалості критичного, то його назвемо підкритичним.

Отже, головним завданням для аналізу загального часу виконання робіт виробничих програм являється знаходження критичного шляху та його тривалості. Для цього, насамперед, необхідно знайти всі повні шляхи. Так, наприклад, за сітковим графіком (рис. 4.14) не важко встановити, що з вихідної події до завершальної веде шість шляхів.

Для кожного шляху підраховуємо сумарні затрати часу й одержані результати помістимо в табл. 4.2.

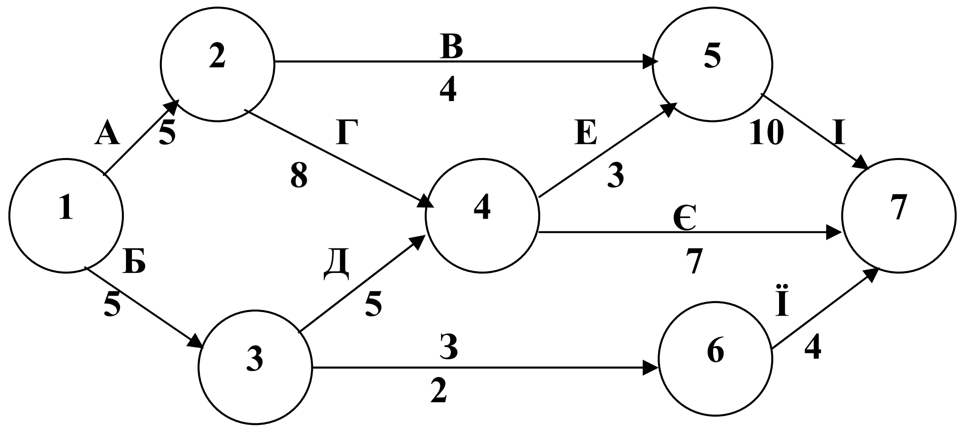


Рис. 4.14.

Таблиця 4.2

Повний шлях	Перелік подій	Довжина шляху, дні
L_1	1-2-5-7	5+4+110=19
L_2	1-2-4-5-7	5+8+3+10=26
L_3	1-2-4-7	5+8+7=20
L_4	1-3-4-5-7	6+5+3+10=24
L_5	1-3-4-7	6+5+7=18
L_6	1-3-6-7	6+2+4=10

Тоді, відповідно до означення критичного шляху

$$L_{кр} = \max\left\{L_i,\, i = \overline{1,6}\right\} = L_2 = 26 \ днів.$$

Отже, тривалість критичного шляху складе 26 днів, тобто для повного виконання виробничої програми потрібно 26 днів. На графіку критичний шлях відображаємо з допомогою подвійної чи жирної лінії. Виконати завдання раніше неможливо, оскільки для досягнення завершальної події необхідно обов’язково пройти критичний шлях.

Визнавши критичний шлях, ми одночасно встановимо критичні події графіку 1, 2, 4, 5 та 7 та критичні роботи А-Г-Е-І.

На основі висловленого вище можна зробити ряд практичних рекомендацій. Підприємець у першу чергу повинен приділяти максимальну увагу аналізу своєчасного виконання критичних робіт, забезпеченню їх необхідними трудовими і матеріальними ресурсами. Для зменшення витрат часу на виконання запланованого комплексу робіт необхідно насамперед зменшувати тривалість критичних робіт. Збільшення часу виконання будь-якої критичної роботи веде до відкладання терміну завершення всього проекту. У той же час затримка виконання некритичних робіт може не вплинути на термін наступлення завершальної події.

У реальних сіткових графіках критичні роботи складають не більше 20 % від загального числа робіт, тому стає зрозумілою практична цінність методики критичного шляху в ефективному управлінні та аналізі складними виробничими процесами. Замість того щоби постійно тримати під контролем увесь комплекс запланованих робіт, підприємець може зосередити основну увагу та зусилля на аналізі виконання тільки певної частини робіт.

У запропонованому прикладі (рис. 4.14) повних шляхів виявилось небагато, тому серед них легко було вибрати критичний. Проте при виконанні реальних виробничих програм, коли подій та робіт є велике число, простий перебір усіх повних шляхів являється досить трудомістким. Розглянемо методику прискорення та формалізації знаходження критичного шляху, яка базується на аналізі числових характеристик сіткового графіка.

Основними часовими параметрами сіткового графіка являється ранній і пізній термін настання подій, на основі яких визначають часові параметри робіт: можливо ранній і пізній час початку та закінчення робіт, тривалість критичного та підкритичного шляхів, резерву часу та інші показники.

Для розрахунку параметрів введемо наступні умовні позначення.

Позначимо: i, j, k - номери подій; (i, j) - номер роботи; $t(i, j)$ - тривалість роботи; $t_{р}(i), t_{П}(i)$ - ранній (пізній) термін настання i-ої події; $t_{об}(i)$ - допоміжна розрахункова величина, яка визначає максимальну тривалість шляху від події i до завершення події (читається t обернена від i); $t_{рП}(i, j), t_{рз}(i, j)$ - ранній початок (закінчення) роботи (i, j); $t_{ПП}(i, j), t_{Пз}(i, j)$ - пізній початок (закінчення) роботи (i, j); R_{i} - резерв часу i-ої події; $R_{П}(i, j)$ - повний резерв часу роботи (i, j); $R_{В}(i, j)$ - вільний резерв часу роботи (i, j); $T_{кр}$ - тривалість критичного шляху.

Для зручнішого аналізу сіткового графіка, кожну подію на малюнку зображено великим кружечком, який розіб’ємо на чотири сектори. У верхньому секторі помістимо номер події, у нижньому – значення резерву часу події, у лівому – інформацію про ранній термін настання події, у правому – про пізній термін настання події (рис. 4.15).

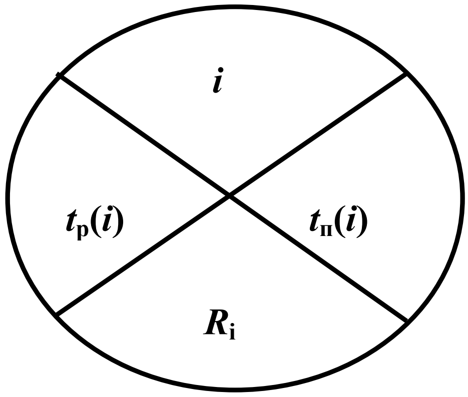


Рисунок 4.15.

Тепер опишемо основні часові параметри сіткового графіка і приведемо розрахункові формули для їх аналізу. Почнемо опис розрахунків із визначення раннього терміну настання кожної події. Відомо, що i-та подія не може настати раніше, ніж відбудуться всі попередні події і не будуть виконані всі попередні роботи. Тому $t_р(i)$ являє собою термін, який відображає завершення попередніх робіт (одні з них завершуються раніше, інші пізніше). Тому під раннім терміном настання i-ої події розуміємо той максимальний час, який відповідає завершенню всіх безпосередньо попередніх робіт. Цей параметр розраховується за формулою:

$$t_p(i) = \max_{k \in K}\{t_p(k) + t(k,i)\}, \tag{4.1}$$

де K-множина подій, які безпосередньо передують події i. Розрахунок ранніх термінів настання подій розпочинається від початкової події, для якої йому надається нульове значення. Припустимо, що початкова подія має номер 1, тоді $t_р(i)$ =0. Після знаходження раннього терміну настання завершальної події переходимо до визначення пізніх термінів настання i-ої події. Припустимо, що завершальна подія має номер n. Тоді зрозуміло, що виробнича програма не може бути виконаною раніше, ніж за час $t_р(n)$. Очевидно, що $t_р(n)$= $Т_{кр}$ і служить основою для знаходження критичних шляхів. Тоді послідовність стрілок сіткового графіка, що дають максимум при визначенні $t_р(i)$ від початкової події до завершальної, формують критичний шлях.

Під пізнім терміном настання i-ої події будемо розуміти найбільш пізній термін настання даної події, при якому плановий термін завершення виробничої програми не зміниться. Зрозуміло, що для завершальної події пізній термін настання співпадає з її раннім терміном, тобто справедлива рівність:

$$t_p(n) = t_п(n) = T_{кр}. \qquad (4.2)$$

Пізні терміни настання подій починають розраховуватися від завершальної події до початкової з допомогою такої формули:

$$t_п(i) = \min_{j \in I}\{t_П(j) - t(i,j)\}, \qquad (4.3)$$

де I – множина подій, які безпосередньо передують події i.

Крім цього, пізні терміни настання подій можна визначити з допомогою формули:

$$t_п(i) = T_{кр} - t_{об}(i), \qquad (4.4)$$

де

$$t_{об}(i) = \max_{j \in I}\{t_{об}(j) + t(i,j)\}. \qquad (4.5)$$

Зрозуміло, що для критичних робіт ранні та пізні терміни настання подій співпадають, тобто ці події не мають резерву часу для свого настання. Резерв часу i-ої події розраховується за формулою:

$$R_i = t_п(i) - t_p(i). \qquad (4.6)$$

Він показує, на який допустимий період часу можна затримати настання цієї події, при цьому не збільшуючи терміну виконання виробничої програми.

Замінимо тривалості виконання робіт в умові прикладу 4.1, які вкажемо на графіку (рис. 4.16). Далі для даного сіткового графіка проведемо розрахунки часових характеристик подій. Оскільки подія 1 є початковою, то $t_р(1) = 0$. Тоді, скориставшись формулою (4.1), отримуємо значення ранніх термінів настання інших подій (рис. 4.16): $t_p(2) = p_p(1) + t_p(1,2) = 0 + 8 = 8$; $t_р(3) = t_р(2) + t_р(2, 3) = 8 + 3 = 11$.

Для події 4 існує два попередніх шляхи L(1-2-4) та L (1-4). Отже, маємо:

$$t_p(4) = \max\{t_p(2) + t_p(2,4); t_p(1) + t_p(1,4)\} = \max\{8 + 10; 1 + 2\} = 18.$$

Аналогічно проводимо обчислення для інших подій. У відповідності до прийнятих позначень поміщаємо їх у ліву частину кружечка (рис. 4.16). Для завершальної події отримаємо:

$$t_p(13) = \max\{t_p(11) + t_p(11,13); t_p(12) + t_p(11,13)\} = \max\{70 + 8; 63 + 1\} = 78.$$

Враховуючи, що $t_р(13) = 78$, отримуємо значення критичного шляху: $T_{кр} = t_р(13) = 78$. Рухаючись у зворотному напрямку, тобто від події 13 до 1, обчислимо значення пізніх термінів настання подій.

На основі (4.2) отримуємо: $t_п(13) = 78$. Для подальших розрахунків використаємо (4.3). Тоді

$$t_п(11) = t_п(13) - t(11,13) = 78 - 8 = 70;$$
$$t_п(12) = t_п(13) - t(12,13) = 78 - 1 = 77.$$

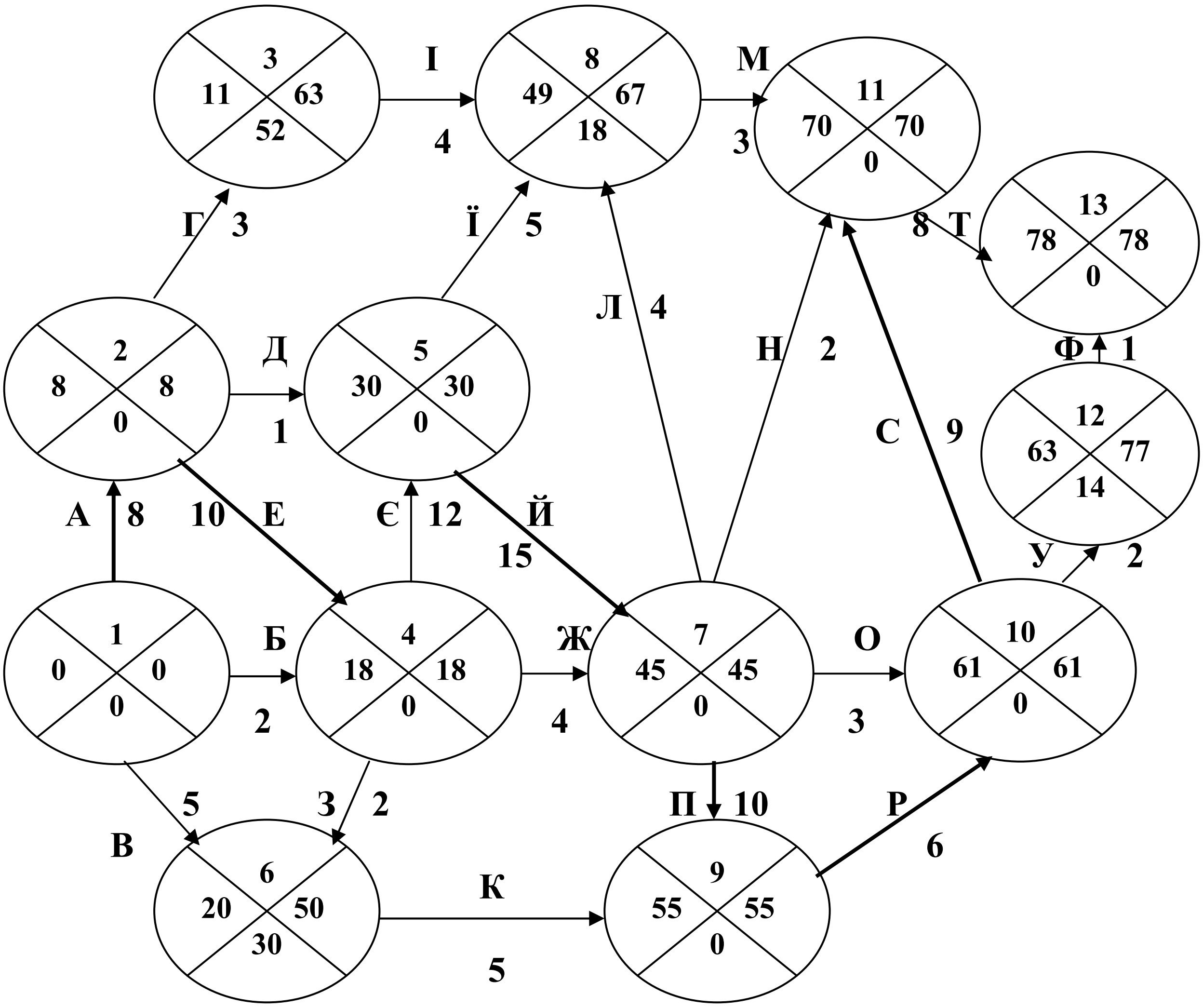


Рис. 4.16

Оскільки, для події 10 існує два наступних шляхи, то має місце $t_п(10) = \min\{t_п(11) - t(10,11); t_п(12) - t(10,12)\} = \min\{70 - 9; 77 - 2\} = 61.$

Аналогічно проведемо розрахунки для інших подій, і отриманий результат відобразимо в правій частині кружечків (рис. 4.16).

Користуючись формулою (4.6), знайдемо резерви часу для кожної події й відобразимо їх у нижній частині кружечка відповідних подій (рис.4.16).

Маємо:

$$R_1 = t_п(1) - t_p(1) = 0 - 0 = 0,$$
$$R_2 = t_п(1) - t_p(2) = 8 - 8 = 0,$$
$$R_3 = t_п(1) - t_p(3) = 63 - 11 = 52,$$
$$R_4 = t_п(1) - t_p(4) = 18 - 18 = 0, \text{ і т.д.}$$

Наприклад, резерв часу R_3=52 означає, що відбуття події 3 може бути затриманим на 52 одиниці часу без збільшення загального терміну виконання робочої програми. Аналіз проведених обрахунків показує, що події, які утворюють критичний шлях, не мають резервів часу. Тепер перейдемо до аналізу часових характеристик робіт сіткового графіка.

Раннім початком роботи (*i, j*) є найбільш ранній з можливих термінів початку роботи. До даного терміну мають бути завершені всі роботи, які передують даній. Очевидно, що ранній термін початку роботи співпадає з раннім терміном настання *i*-ої події, тобто має місце рівність

$$t_{рп}(i, j) = t_р(i). \tag{4.7}$$

Під раннім терміном завершення роботи (*i, j*) ми розуміємо найбільш ранній із множини можливих термінів завершення роботи. До даного терміну мають завершитися всі попередні роботи, а також дана робота.

Ранній термін завершення роботи (*i, j*) обраховується за формулою

$$t_{рз}(i, j) = t_р(i) + t(i, j). \tag{4.8}$$

Ні жодна робота (*i, j*) не може завершитися пізніше допустимого пізнього терміну настання *j*-ої події. Отже, пізній термін завершення роботи є найбільш пізнім терміном завершення роботи , при якому плановий термін виконання виробничої програми не зміниться. Тому для його розрахунку можна використати залежність:

$$t_{пз}(i, j) = t_п(j). \tag{4.9}$$

Тоді пізній термін початку роботи (*i, j*) буде найбільш пізнім терміном початку роботи, при якому плановий термін виконання виробничої програми не зміниться. Розрахувати цей показник можна за формулою:

$$t_{пп}(i, j) = t_п(j) - t(i, j). \tag{4.10}$$

Для критичних робіт характерним є співпадіння ранніх і пізніх термінів початку роботи, а також ранніх і пізніх термінів її завершення. Коротко розглянемо поняття резерву часу шляху, який властивий усім некритичним шляхам. Резерв часу шляху визначають як різницю між довжинами критичного та даного шляху

$$R(L) = T_{\text{кр}} - t(L). \qquad (4.11)$$

Він показує, на скільки в сумі можна збільшити тривалість усіх робіт даного шляху. Якщо затримати виконання робіт даного шляху на час, більший, ніж $R(L)$, то критичний шлях переміститься на шлях L. Отже, будь-яка робота шляху L на дільниці, яка не співпадає з критичним шляхом, має резерв часу.

Окрім перелічених вище часових характеристик сіткового графіка, практичне значення мають оцінки резерву часу робіт. Розглянемо чотири типи резерву часу: повний і вільний резерви часу, частковий резерв часу першого виду та незалежний резерв.

Повний резерв часу роботи (i, j) показує, наскільки можна збільшити тривалість даної роботи чи змістити її початок виконання, не змінюючи раннього терміну настання початкової події i, при умові, що подія j настане не пізніше свого пізнього терміну. Для його знаходження використовуємо формулу:

$$R_{\text{п}}(i,j) = t_{\text{пп}}(i,j) - t_{\text{рп}}(i,j) = t_{\text{пз}}(i,j) - t_{\text{рз}}(i,j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t(i,j). \qquad (4.12)$$

Повний резерв часу роботи рівний резерву максимального із шляхів, які проходять через дану роботу. Цим резервом можна розпоряджатися при виконанні даної роботи, якщо її початкова подія наступить у самий ранній термін, і можна допустити відбуття її кінцевої події в пізніший термін (рис. 4.17).

Важливою властивістю повного резерву часу (i, j) є те, що він належить не тільки даній роботі, а й усім повним шляхам, які проходять через неї. Якщо буде використано повний резерв часу тільки однієї роботи, то резерви часу інших робіт максимального шляху, що проходить через неї, будуть вичерпані. Резерви часу робіт не максимальних шляхів, які проходять через дану роботу, зменшаться відповідно на величину використаного резерву.

Вільний резерв часу (частковий резерв часу другого виду), резерв часу роботи (i, j) представляє собою частину повного резерву часу, на яку можна збільшити тривалість роботи, при цьому не змінивши раннього терміну її кінцевої події (рис. 4.17). Тобто, він показує, наскільки можна збільшити тривалість роботи (i, j) або відстрочити початок її виконання за умови, початкова подія i та кінцева подія j настануть у ранній час. Для обчислень вільного резерву роботи (i, j) використаємо формулу:

$$R_B(i,j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i,j). \tag{4.13}$$

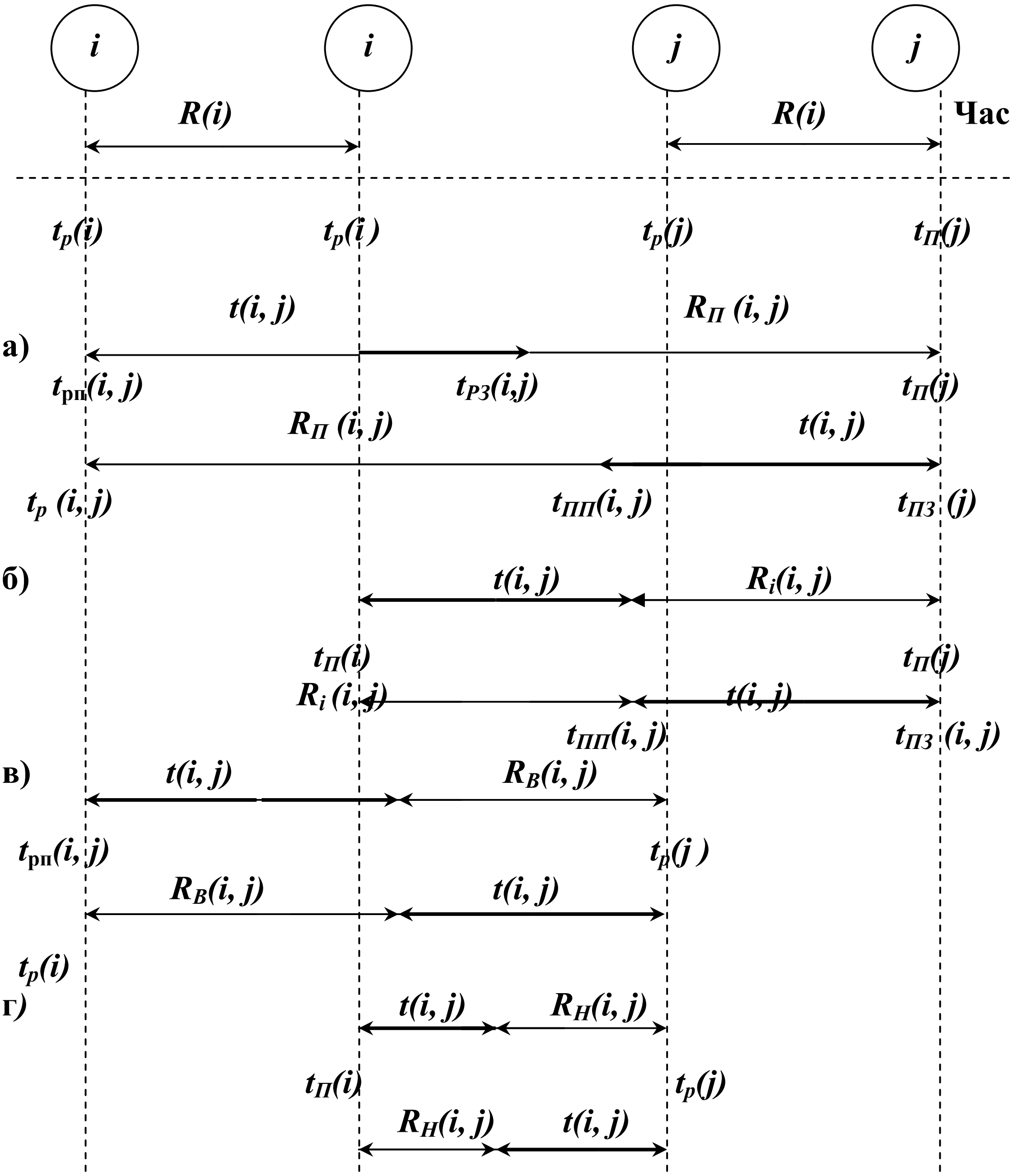


Рис. 4.17. Графічний аналіз резервів часу подій та робіт.

Вільний резерв часу можна використовувати для запобігання що випадковостей, які можуть виникнути в процесі виконання робіт. Якщо планувати виконання робіт по ранніх термінах їх початку та закінчення, то завжди при потребі буде можливість перейти на пізні терміни початку та завершення робіт.

Частковий резерв першого виду $R_\text{i}(i, j)$ роботи (i, j) являє собою складову частину повного резерву часу, на яку можна збільшити тривалість роботи, не змінивши при цьому пізнього терміну її початкової події. Цим резервом можна користуватися при виконанні роботи (i, j) при умові, що її початкова та кінцева події настануть у пізні терміни (рис. 4.17 б). Для розрахунку використаємо формулу:

$$R_i = t_{п}(j) - t_{п}(i) - t(i,j). \tag{4.14}$$

Незалежний резерв часу $R_н$ (i, j) роботи (i, j) – це частина повного резерву часу, отримана для випадку, коли всі попередні роботи закінчуються в пізні терміни, а всі наступні починаються в ранні терміни (рис. 4.17). Він обраховується за формулою:

$$R_{н}(i,j) = t_{p}(j) - t_{п}(i) - t(i,j). \tag{4.15}$$

Використання незалежного резерву часу не впливає на величину резервів часу інших робіт. Резерви $R_н(i, j)$ стараються використовувати тоді, коли закінчення попередньої роботи відбулося в пізній допустимий термін, а наступні роботи хочуть виконатись у ранній термін. Якщо $R_н$ $(i, j) \geq 0$, то така можливість має місце. У протилежному випадку такої можливості не існує, оскільки попередня робота ще не завершилася, а наступна вже повинна починатися. Тому, при $R_н(i, j)<0$ відсутній реальний зміст. Фактичний незалежний резерв часу мають лише ті роботи, котрі не належать максимальним шляхам, які проходять через їх початкові та кінцеві події.

Враховуючи сказане, можна зробити ряд висновків, які будуть корисними для глибокого аналізу сіткових графіків. Якщо початковий резерв часу першого виду може бути використаним на збільшення тривалості даної та наступної робіт без затрат резерву часу попередніх робіт, вільний резерв – на збільшення тривалості даної та попередніх робіт без порушення резерву часу наступних, то незалежний резерв часу можна використати для збільшення тривалості тільки даної роботи. Якщо на критичному шляху лежить початкова подія i , то має місце

$$R_{п}(i, j) = R_{i}(i, j), \tag{4.16}$$

якщо ж – кінцева j, то

$$R_{п}(i, j) = R_{н}(i, j). \tag{4.17}$$

Якщо на критичному лежить початкова й кінцева події i та j, але сама робота не належить даному шляху, то справедливі співвідношення

$$R_{п}(i, j) = R_{i}(i, j) = R_{в}(i, j) = R_{н}(i, j). \tag{4.18}$$

Якщо повний резерв деякої роботи (i, j) рівний нулю, то $R_{в}(i, j) = 0$. Для цих двох резервів завжди справедливе співвідношення $R_{п}(i,j) \geq R_{н}(i,j)$. Якщо тривалість роботи (*i, j*) збільшити на величину $\tau_1(\tau_1 \leq R_{в}(i,j))$, то ранній термін початку наступної роботи не зміниться. У протилежному випадку ранній термін початку наступної роботи збільшиться на величину $\tau_1 - R_{в}(i,j)$. Якщо тривалість роботи (*i, j*) збільшити на величину $R_{п}(i,j)$, то утвориться новий критичний шлях, тривалість якого теж буде рівною $Т_{кр}$.

Якщо тривалість роботи (*i, j*) збільшити на величину $\tau_2 \leq R_{п}(i,j)$, то критичний шлях не зміниться. Якщо її збільшити на величину $\tau_2 > R_{п}(i,j)$, то з'явиться новий критичний шлях, тривалість якого перевищить тривалість попереднього (старого) на величину $\tau_2 - R_{п}(i,j)$.

Проведемо аналіз часових параметрів робіт для сіткового графіка, зображеного на рис. 4.16. Для більш наглядного відображення результати розрахунків представимо таблицею 4.3.

Наприклад, розглянемо роботу (5, 8).

За формулою (4.7) знайдемо ранній термін початку роботи

$$t_{рп}(5{,}8) = \mathbf{t}_{р}(5) = 30\,(\text{дн.}).$$

За формулою (4.8) знайдемо ранній термін завершення роботи

$$t_{рп}(5{,}8) = \mathbf{t}_{р}(5) + t(5{,}8) = 30 + 5 = 35\,(\text{дн.}).$$

За формулою (4.10) знайдемо пізній термін початку роботи

$$t_{пп}(5{,}8) = \mathbf{t}_{п}(8) + t(5{,}8) = 67 - 5 = 62\,(\text{дн.}).$$

За формулою (4.9) знайдемо пізній термін завершення роботи

$$t_{пз}(5{,}8) = \mathbf{t}_{п}(8) = 67\,(\text{дн.}).$$

Отже, як показує аналіз, робота (5, 8) повинна почалися в інтервалі (30 – 62) дні й закінчитися в інтервалі (36 - 67) днів від початку виконання виробничої програми.

Користуючись формулою (4.12), знайдемо повний резерв роботи (5, 8):

$$R_{п}(5{,}8) = \mathbf{t}_{пз}(5{,}8) = 67 - 35 = 32\ (\text{дн.}).$$

Це означає, що термін роботи (5, 8) можна збільшити на 32 дні, при цьому термін виконання виробничої програми не зміниться. Проаналізуємо на прикладі роботи (5, 8) справедливість твердження про те, що повний резерв часу роботи рівний резерву максимального із шляхів, які проходять через дану роботу. Через роботу (5, 8) проходять такі повні шляхи:

L1 (1 – 2 – 5 – 8 –11 - 13) = 25 (дн.);

$L2$ (1 – 2 – 4 – 5 –8 – 11 - 13) = 46 (дн.);
$L3$ (1 – 4 – 5 – 8 –11 -13) = 30 (дн.).

Звідси, довжина максимального повного шляху буде 46 днів (шлях $L2$). За формулою (4.11) знайдемо резерви часу шляху $L2$:

$$R(L_2) = T_{\text{кр}} - t(L_2) = 78 - 46 = 32 \ (\text{дн.}).$$

Отже, ми одержали, що Rп (5, 8) = R ($L2$). Тепер можемо зробити висновок: якщо збільшити тривалість виконання роботи на 32 дні, тобто з 5 до 37 днів, то повністю буде вичерпаним резерв часу шляху $L2$. Тоді шлях $L2$ стане критичним, а резерви часу інших шляхів відповідно зменшаться на 32 дні.

4. 5. Оптимізація сіткових графіків

Оптимізація сіткового графіка є процесом удосконалення організації виконання робіт програми з урахуванням термінів їх здачі. Заплановані заходи спрямовані на скорочення довжини критичного шляху, вирівнювання коефіцієнтів напруженості робіт, більш раціональне використання ресурсів.

Насамперед приймаються заходи, спрямовані на зменшення тривалості робіт критичного шляху: перерозподіл ресурсів усіх видів із резервних у критичні зони; зменшення трудомісткості критичних робіт за рахунок передачі частини робіт на шляхи з резервом часу; аналіз топології сітки; зміна складу робіт; введення паралельного виконання робіт критичного шляху. Процес скорочення тривалості виконання робіт може привести до утворення критичного шляху. У такому випадку слід перенести процес оптимізації на новий критичний шлях і так продовжувати до одержання ефективного варіанту. Виконання виробничої програми тісно пов’язане з вартісними чинниками виконання робіт. Вартісний фактор вводиться в сіткову модель шляхом визначення залежності “вартість-тривалість” для кожної роботи виробничої програми.

Даній залежності властивий обернено пропорційний зв’язок, тобто зменшення тривалості роботи пропорційне зростанню її вартості. (Рис. 4.18). Для кожної роботи (i, j) має місце:

$$a(i, j) \le (i, j) \le b(i, j),$$

де $a(i, j)$ – мінімальна (інтенсивна) тривалість роботи (i, j); $b(i, j)$ – максимальна (екстенсивна) тривалість роботи (i, j).

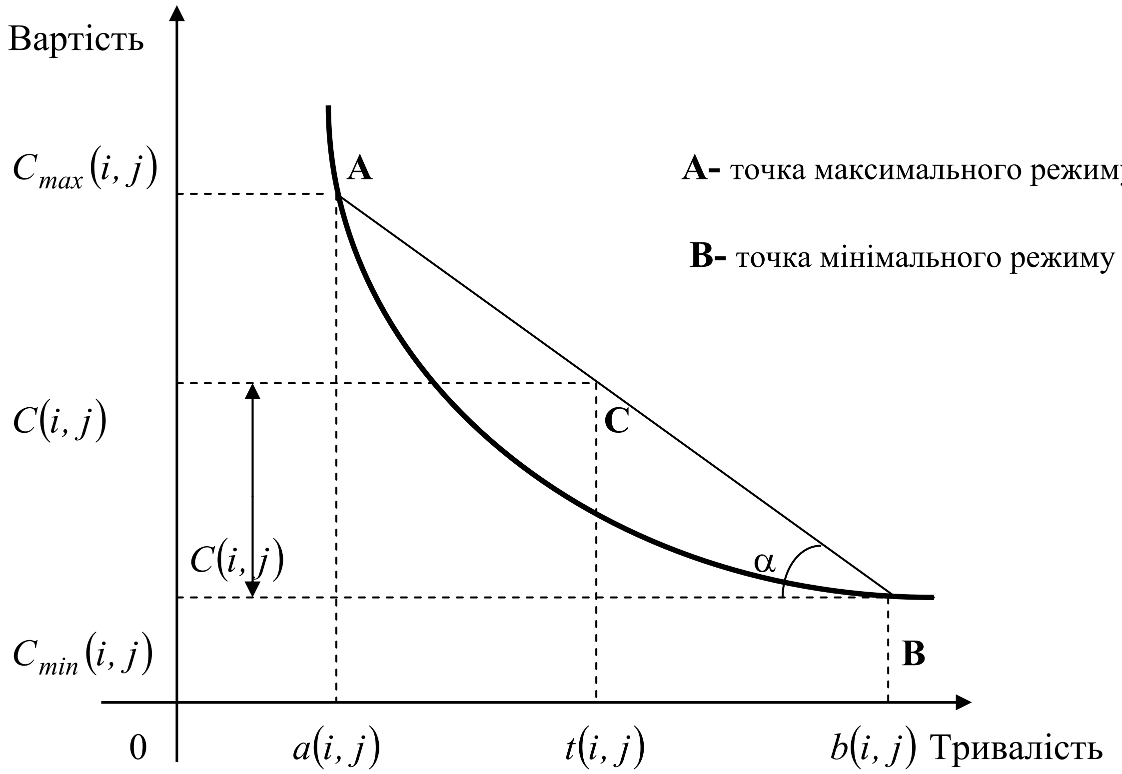


Рис. 4.18. Залежність вартості роботи від її тривалості.

Точка *B* відповідає мінімальному режиму виконання роботи (*i, j*). Тривалість роботи в (*i, j*) можна зменшити, збільшивши інтенсивність використання ресурсів (тобто кількість ресурсів, витрачених на виконання роботи за одиницю часу), і як наслідок – вартість даної роботи зросте. Проте існує межа *a*(*i, j*), за якою подальше збільшення інтенсивності використання ресурсів призведе лише до збільшення затрат без скорочення тривалості робіт (точка *A*).

При цьому вартість *C*(*i,j*) роботи (*i,j*) прийме значення $C(i,j) \in [C_{\min}(i,j); C_{\max}(i,j)]$, де $C_{\min}(i,j)$ - вартість при максимальній тривалості роботи (*i, j*), $C_{\max}(i,j)$ - вартість при мінімальній тривалості роботи (*i, j*).

Щоб провести криву (рис. 4.19), виконаємо апроксимацію по прямій і знайдемо зміну вартості роботи $\Delta C(i,j)$ при скороченні її тривалості на величину $[b(i,j) - t(i,j)]$:

$$\Delta C(i,j) = [b(i,j) - t(i,j)] \times k(i,j), \tag{4.19}$$

де $k(i,j) = tg\alpha = \dfrac{C_{\max}(i,j) - C_{\min}(i,j)}{b(i,j) - a(i,j)}$ показує затрати на прискорення роботи (*i, j*) (у порівнянні з максимальною тривалістю) на одиницю часу; α .- кут нахилу апроксимованої прямої.

Проведемо оптимізаційний аналіз сіткового графіка з допомогою резервів часу робіт. Тривалість кожної роботи будемо збільшувати до тої пори, поки не буде використаним існуючий резерв часу, чи не буде досягнута верхня межа тривалості $b(i, j)$.

У результаті, початкова вартість програми $C = \sum_{(i,j)\in L} C(i.j)$ зменшиться на величину

$$\Delta C = \sum_{(i.j)\in L} \Delta C(i, j) - \sum_{(i,j)\in L} [b(i, j) - t(i, j)] \times k(i, j).$$

Розглянемо оптимізацію сіткового графіка (рис. 4.16), доповнивши його граничними значеннями $a(i, j)$ та $b(i, j)$ і вартісними параметрами $C_{\max}(i, j), C(i, j), C_{\min}(i, j)$.(табл. 4.3.)

Припустимо, що вартість робіт, які не мають вільного резерву часу (табл. 3)становить 100 грн. Тоді повна вартість нового варіанту графіка буде (100 + 980) – 689,5 = 12905 грн., тобто вона зменшиться на 34,82% (рис. 4.19).

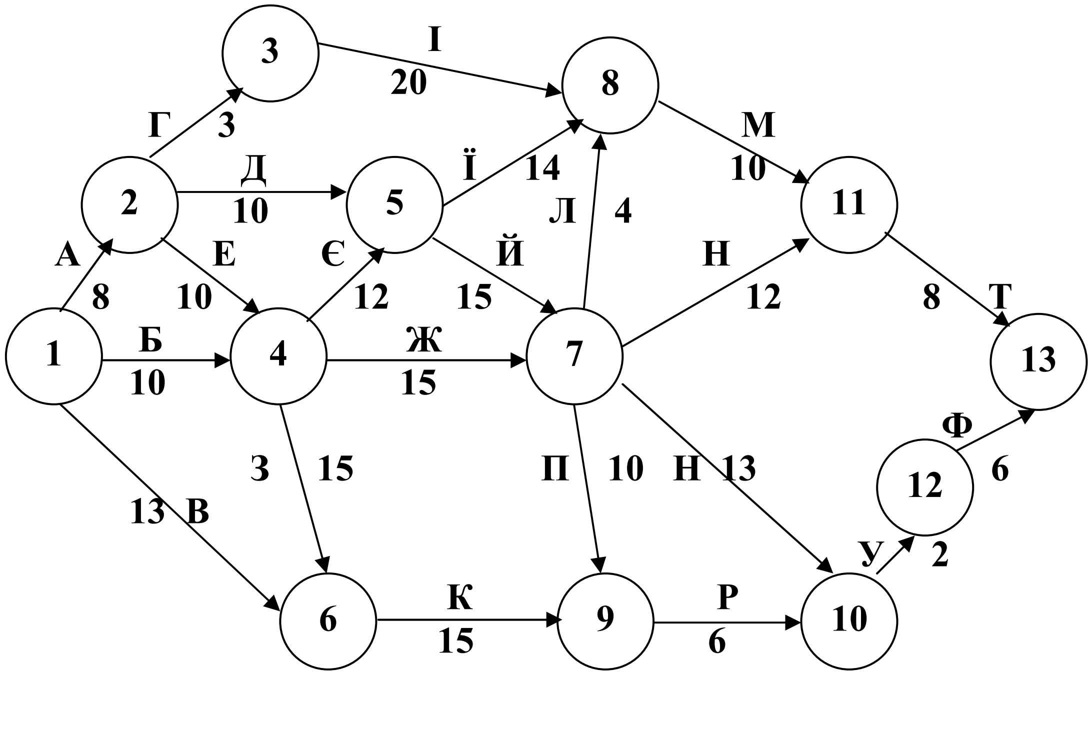


Рис. 4.19. Оптимізаційний варіант сіткового графіка.

На практиці може виникнути обернена задача, пов’язана з інтенсифікацією виробничої програми. Зменшення тривалості виконання комплексу робіт приведе до збільшення загальної вартості виробничої програми. Тому виникає необхідність у визначенні оптимального співвідношення між ціною програми C і затратами часу t на її виконання. Взаємозв'язок між названими чинниками можна представити функцією $C = f(t)$.

Розглянемо оптимізацію сіткового графіка (рис. 4.20) з допомогою наступної методики.

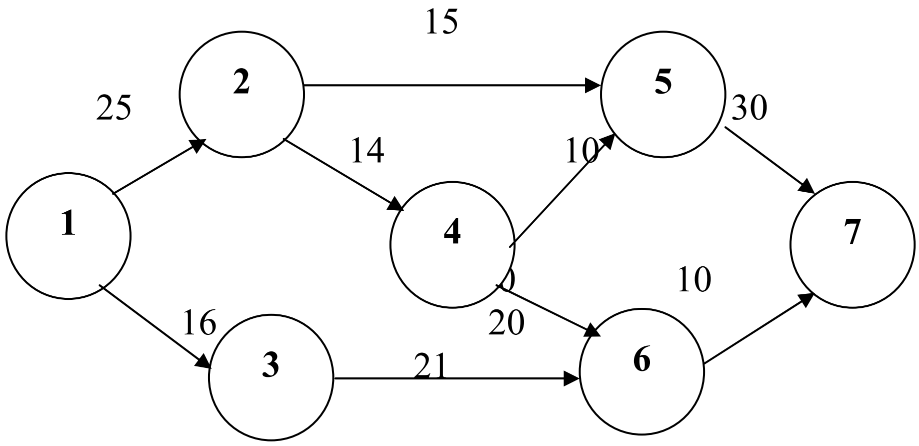


Рис. 4.20.

Для початкового аналізу приймемо тривалість виконання кожної роботи рівною максимально допустимому значенню в (i, j) (табл.4.4). Тоді мінімальна вартість даної виробничої програми буде С = 560 грн.

Таблиця 4.4.

№ п/п	Робота	Тривалість роботи		Коефіцієнт затрат на прискорення	Вартість виконаної роботи, грн.
	(i,j)	***min(i,j)***	***maxb(i,j)***	***k(i,j)***	***C(i,j)***
1	(1, 2)	5	25	8	70
2	(2, 5)	6	15	4	40
3	(5, 7)	10	30	5	80
4	(2, 4)	3	14	3	55
5	(4, 5)	2	10	2	30
6	(4, 6)	8	20	6	95
7	(1, 3)	2	16	5	50
8	(3, 6)	5	21	2	65
9	(6, 7)	4	10	4	75

Далі представляємо всі повні шляхи та обчислюємо їх тривалості.

Отримуємо:

$L_1(1-2-5-7);\quad t(L_1)=50$ дн.

$L_2(1-2-4-5-7);\quad t(L_2)=79$ дн. - критичний шлях,

$L_3(1-2-4-6-7);\quad t(L_3)=69$ дн.

$L_4(1-3-6-7);\quad t(L_4)=47$ дн.

Для проведення наступних розрахунків скористаємося рис. 5.22, де над стрілками поставимо коефіцієнти *k(i,j),* а під ними максимально можливе зменшення тривалості робіт $\Delta t(i,j)=b(i,j)-a(i,j)$.

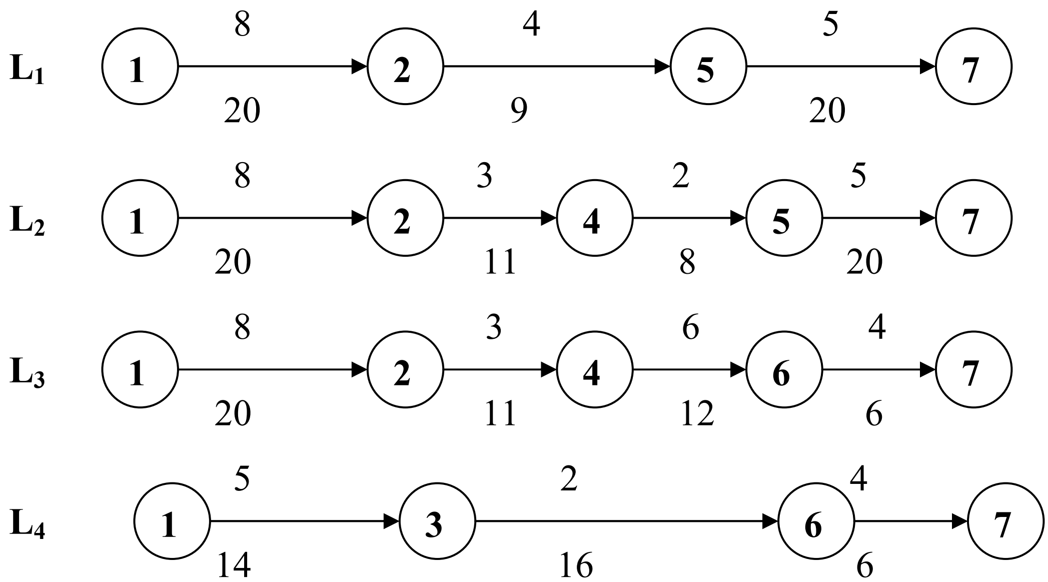


Рис. 5.21. Представлення повних шляів.

Проведемо аналіз подальших обчислень у вигляді наступних етапів.

Етап І. Відомо, що зменшити тривалість виконання виробничої програми можна за рахунок скорочення тривалості робіт критичного шляху. У нашому випадку критичним є шлях L_4. Робота (4, 5) даного критичного шляху має найменше значення коефіцієнта затрат на прискорення:

$$\underset{(i,j)\in L_2}{k_{\min}}(i,j)=\min\{k(1,2);k(2,4);k(5,7)\}=\min\{8,3,2,5\}=2.$$

Отже, $\underset{(i,j)\in L_2}{k_{\min}}(i,j)=2$.

Тривалість роботи (4, 5) можна скоротити не більше, ніж на 8 днів. Тоді довжина критичного шляху зміниться на 8 днів. У той же час, за рахунок інтенсивності роботи (4, 5) вартість програми зросте до 560 + 2×8 = 576 грн.

Отже, на першому етапі ми отримали залежність

$$C = 560 + 2 \times (79 - t), \text{ де } 71 \le t \le 79.$$

Окрім цього $t(L_1) = 50,\ t(L_2) = 71, t(L_3) = 69, t(L_4) = 47$.

Переходимо до другого етапу.

Етап II. Критичний шлях залишився на L_2. Знаходимо найменше значення коефіцієнта $k(i,j)$, який буде рівним 3. Це буде відповідати роботі (2, 4). Тривалість роботи можна зменшити не більше, ніж як на 11 днів. На дану величину зменшиться критичний шлях і шлях L_3, і як наслідок вартість програми збільшиться від 576 до 576 + 3×11 = 609 грн.

Другий етап нам дає:

$$C = 576 + 3 \times (71 - t), \textbf{ де } 60 \le t \le 71,$$

$$t(L_1) = 50,\ t(L_2) = 61, t(L_3) = 59, t(L_4) = 47.$$

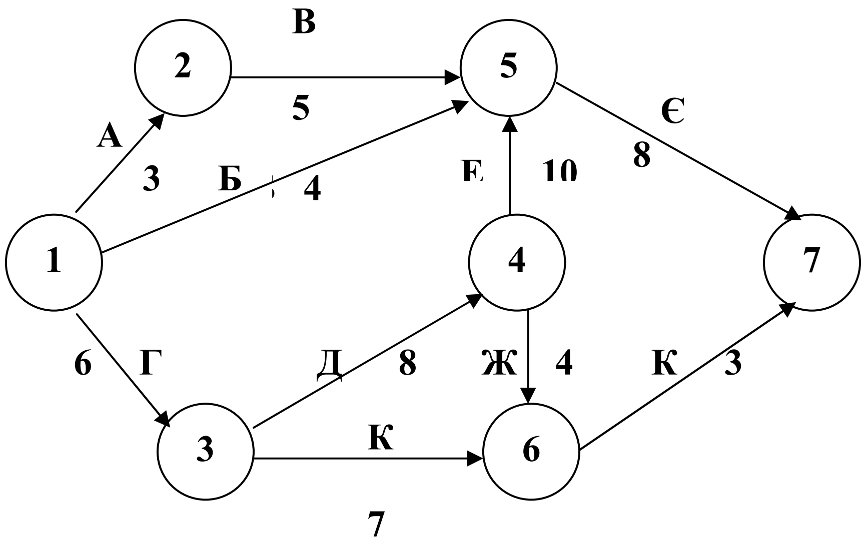
Аналіз подальших етапів оптимізації представимо з допомогою таблиці 4.6.

Отже, аналіз показує, що на восьмому етапі ми завершили алгоритм оптимізації приведеного сіткового графіка. Заплановану програму можна виконати за 21 день. Але при цьому її вартість зросте більше, як у 3 рази. Окрім цього, існує ще можливий варіант зменшення тривалості роботи (2, 5). Однак, це не змінить загального часу виконання всієї програми в цілому.

4. 6. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Опишіть основні етапи сіткового моделювання.
2. На чому базується сіткове моделювання?
3. Охарактеризуйте основні елементи сіткового графіка.
4. Опишіть основні правила побудови сіткових графіків.
5. Опишіть процедуру упорядкування сіткового графіка.
6. Дайте тлумачення шляху та опишіть його види.
7. Охарактеризуйте основні часові параметри сіткового графіка.
8. Зробіть графічний аналіз резервів часу подій і робіт.
9. Опишіть процедуру процесу оптимізації сіткового графіка.

10. Опишіть основні етапи процесу оптимізації сіткового графіка.
11. Для умовного технологічного процесу, який описується з допомогою сіткового графіка (рис. 4.22) розрахувати його основні часові параметри.



Таблиця 4.3.

№ п/п	**Робота**	***t* (*j*)**	**Термін початку та закінчення роботи**				**Резерви часу роботи**			
	(*j*)		$t_{рп}(i, j)$	$t_{рз}(i, j)$	$t_{пп}(i, j)$	$t_{пз}(i, j)$	$R_{п}(i, j)$	$R_{в}(i, j)$	$R_{1}(i, j)$	$R_{2}(i. j)$
1	(1, 2)	8	0	8	0	8	0	0	0	0
2	(1, 4)	2	0	2	16	18	16	16	16	16
3	(1, 6)	5	0	5	45	50	45	15	45	15
4	(2, 3)	3	8	11	60	63	52	0	52	0
5	(2, 5)	1	8	9	29	30	21	21	21	21
6	(2, 4)	10	8	18	8	18	0	0	0	0
7	(4, 5)	12	18	30	18	30	0	0	0	0
8	(4, 7)	4	18	22	41	45	23	23	23	23
9	(4, 6)	2	18	20	48	50	30	0	30	0
10	(3, 8)	4	11	15	63	67	52	34	0	-18
11	(5, 8)	5	30	35	62	67	32	14	32	14
12	(5, 7)	15	30	45	30	45	0	0	0	0
13	(6, 9)	5	20	25	50	55	30	30	0	0
14	(7, 8)	4	45	49	63	67	18	0	18	0
15	(8, 11)	3	49	52	67	70	18	18	18	0
16	(7, 11)	2	45	47	68	70	23	23	23	23
17	(7, 10)	3	45	48	58	61	13	13	13	13
18	(7, 9)	10	45	45	45	55	0	0	0	0
19	(9, 10)	6	55	55	55	61	0	0	0	0
20	(10, 11)	9	61	61	61	70	0	0	0	0
21	(11, 13)	8	70	70	70	78	0	0	0	0
22	(10, 12)	2	61	61	75	77	14	0	14	0
23	(12, 13)	1	63	63	77	78	14	14	14	14

Таблиця. 4.5

№ п/п	Робота	Тривалість роботи, дн.			Вільний резерв часу роботи	Вартість роботи, грн			Коефіцієнт затрат на прискорення	Зменшення вартості роботи, грн
	(i, j)	***a(i, j)***	***t(i, j)***	***b(i, j)***	$R_B(i,j)$	$C_{max}(i, j)$	$C(i, j)$	$C_{min}(i, j)$	$k(i, j)$	$\Delta C(i, j)$
1	(1, 4)	1	2	10	16	50	40	5	5.0	8×5.0 = 40.0
2	(1, 6)	2	5	20	15	130	120	20	6.1	10×5.0 = 61.0
3	(2, 5)	1	1	10	21	40	30	5	3.7	9×3.7 = 33.3
4	(4, 7)	1	4	15	23	80	70	10	5.0	11×5.0 = 55.0
5	(3, 8)	2	4	20	34	90	80	15	4.2	16×4.2 = 67.2
6	(5, 8)	2	5	25	14	150	130	30	5.2	9×5.2 = 46.8
7	(6, 9)	3	5	15	30	180	160	40	11.7	10×11.7 =117
8	(8, 11)	1	3	10	18	130	120	30	11.1	17×11.1 =77.7
9	(7, 11)	1	2	12	23	100	90	10	8.2	10×8.2 =82.0
10	(7, 10)	2	3	18	13	110	80	20	5.6	10×5.6 =56.0
11	(12, 13)	1	1	6	14	80	60	5	10.7	5×10.7 =53.5

Таблиця 4.6.

№ п/п	Значення довжини шляхів					min		Робота	C	$C = f(t)$
	$t(L_1)$	$t(L_2)$	$t(L_3)$	$t(L_4)$	$t_{кр}$	$k(i, j)$	$\Delta t(i, j)$	(i, j)		
1	50	71	69	47	79	2	8	(4, 5)	57	560+2×(79-t)
2	50	61	59	47	71	3	11	(2, 4)	609	576+3×(71-t)
3	30	41	59	47	61	5	20	(5, 7)	709	609+5×(61-t)
4	30	41	53	41	59	4	6	(6, 7)	735	709+4×(59-t)
5	30	41	41	41	53	6	12	(4, 6)	807	735+6×(53-t)
6	30	41	41	25	41	2	16	(3, 6)	839	807+2×(41-t)
7	10	21	21	25	41	8	20	(1, 2)	999	839+8×(41-t)
8	10	21	21	11	25	5	14	(1, 3)	1069	999+5×(25-t)

Тема 5. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Задача прийняття рішень в умовах невизначеності виникає при необхідності діяти в ситуації, яка відома не повністю. Її формулюють переважно як задачу пошуку окремого найкращого (в певному розумінні) рішення на наперед заданій множині допустимих рішень. Основна проблема в тому, що наслідки, пов’язані з прийняттям того чи іншого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності цих наслідків прийнято вимірювати умовними одиницями – втратами, яких за припущенням може зазнати активна особа (той, хто приймає рішення). Основною вхідною інформацією, необхідною для розв’язання задач такого типу, є функція втрат, яка являє собою залежність втрат від двох аргументів: рішення та ситуації. Основний крок при розв’язуванні задачі полягає в перетворенні функції втрат на функцію ризику, яка відображає залежність ступеня ризику, на який іде активна особа. Спосіб такого перетворення неоднозначний і залежить від критерію ризику, який вибрала активна особа.

Основними причинами невизначеності є:

- невизначений характер науково-технічного процесу;
- динамічні зміни внутрішніх і зовнішніх умов розвитку економіки;
- неминучі похибки при аналізі складних систем;
- імовірносний характер основних економічних параметрів;
- розвиток і розширення творчої активності працездатного населення;
- необхідність проектування потужних інформаційних потоків на комп’ютерній базі.

В якості ризику ми розглядаємо такі ситуації, при яких настання невідомих подій дуже ймовірне і може бути знайденим. У той же час ситуація, при якій імовірність настання невідомих подій завчасно не може бути нами встановленою, чи не може бути встановленою традиційними засобами, називається невизначеністю.

Поняття господарського ризику та умови його виникнення тісно пов’язані з поняттям невизначеності й ефективності. Ось чому процесу знаходження найбільш ефективного варіанту розвитку деякої виробничої системи властивий господарський ризик. Отже, раціональні методи прийняття рішень в умовах ризику пов’язані з множиною допустимих (збалансованих) планів і їх ефективностями, які є складовими оптимального планування. Тобто, раціональні рішення в умовах ризику є оптимальними.

За наявності ризику, а отже й невизначеності, під збалансованим планом уже недостатньо розуміти план, узгоджений із внутрішніми та зовнішніми параметрами лише за усередненими очікуваними об'ємними показниками, оскільки їх дійсні значення можуть істотно відрізнятися від очікуваних. Тут необхідно враховувати варіацію невизначених параметрів і частоти, з якими вони потрапляють у той або інший інтервал.

Одним із основних способів підвищення ступеня збалансованості плану в умовах невизначеності є формування необхідних резервів.

Для прийняття рішень в умовах невизначеності вхідна інформація задається у вигляді матриці, стрічки якої відповідають можливим альтернативам, а стовпці – станам систем.

Кожній альтернативі та кожному стану системи відповідає результат (наслідок), який визначає виграш (або втрати) при виборі даної альтернативи й реалізації даного стану. Отже, якщо a_i представляє альтернативу i $(i=\overline{1,n})$, S_j представляє можливий стан j $\left(j=\overline{1,m}\right)$, то $V\left(a_i, S_j\right)$ описує відповідний результат. У загальному випадку $V\left(a_i, S_j\right)$ може бути неперервною функцією аргументів a_i та S_j.

У дискретному випадку вказані дані представляються матрицею:

	S_1	…	S_m
a_1	$V(a_1, S_1)$	…	$V(a_1, S_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	$V(a_n, S_1)$	…	$V(a_n, S_m)$

Така форма представлення в подальшому буде використовуватися при розгляді критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності.

5. 1. Критерій Лапласа

Критерій Лапласа використовується при умові, коли ймовірності можливих станів систем невідомі, тобто в умовах повної невизначеності. Даний критерій базується на використанні принципу недостатнього обгрунтування, який стверджує, що стани системи $S_1, S_2, ..., S_m$ мають рівні ймовірності. Враховуючи вище сказане, початкову задачу можна розглядати як задачу прийняття рішень в умовах ризику, коли вибирається альтернатива a_i, яка дає найбільш очікуваний виграш R_1 (коли $V(a_i, S_j)$ моделює прибуток) або найменший очікуваний програш R_1 (коли $V(a_i, S_j)$ моделює витрати). Отже, для знаходження величини R_1 має місце:

$$R_1 = \begin{cases} \max\limits_i \left\{ \dfrac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{m} V(a_i, S_j) \right\}, \text{якщо } V(a_i, S_j) - \text{прибуток} \\ \min\limits_i \left\{ \dfrac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{m} V(a_i, S_j) \right\}, \text{якщо } V(a_i, S_j) - \text{витрати} \end{cases}, \qquad (5.1)$$

де $\dfrac{1}{m}$ - імовірність реалізації стану S_j $\left(j = \overline{1, m}\right)$.

Даний критерій доцільно використовувати в тих випадках, коли різниця між окремими станами системи велика, тобто велика дисперсія значень.

<u>Приклад</u> 5.1. Підприємство повинно визначити рівень виробництва певного виду продукції так, щоби задовольнити потребу споживачів протягом певного періоду часу. Конкретна кількість споживачів невідома, але очікується , що вона може становити одне з п'яти значень: 250, 300, 350, 400, або 450. Для кожного з цих можливих значень існує найкращий рівень пропозиції чи найкраща альтернатива (з точки зору можливих затрат). Відхилення від цих рівнів приводить до додаткових витрат або через перевищення пропозиції над попитом, або через неповне задоволення попиту. Розмір втрат (тис. грн.) приведений у табл. 5.1. Використовуючи критерій Лапласа, знайти оптимальну альтернативу.

Таблиця 5.1.

Альтернатива	Споживачі					$\sum_{j=1}^{m} V(a_i, S_j)$	$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} V(a_i, S_j)$	$\min_i$
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5			
a_1	4	22	15	16	29	86	17.2	
a_2	10	15	26	12	10	73	14.6	
a_3	8	19	6	24	5	62	12.4	R_1=12.4
a_4	30	25	5	14	16	90	18.0	
a_5	15	5	30	22	9	81	16.2	

Розв'язання.

Принцип Лапласа припускає, що події S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 рівноймовірні. Тобто $p(S = S_j) = \frac{1}{5}, j = \overline{1,5}$. Математичні сподівання витрат при різних альтернативах будуть:

$M(a_1) = 17.2$; $M(a_2) = 14.6$; $M(a_3) = 12.4$; $M(a_4) = 18.0$; $M(a_5) = 16.2$.

Тоді $R_1 = \min_i\{M(a_i)\} = \min\{17.2;\ 14.6;\ 12.4;\ 18.0;\ 16.2\} = 12.4$.

Отже, враховуючи критерій Лапласа, найкращою альтернативою буде альтернатива a_3.

5. 2. Критерій Вальда

Даний критерій є найбільш обережним, оскільки він грунтується на виборі альтернативи з усіх найгірш можливих. У зв'язку з цим критерій Вальда часто називають максиміним (мінімаксним).

Якщо результат $V(a_i, S_j)$ відображає втрати особи, що приймає рішення, то для альтернативи a_i найбільші втрати, незалежно від можливого стану S_j, будуть рівними $\max_j\{V(a_i, S_j)\}$. Відповідно до мінімаксного критерію найкращою вибирається альтернатива a_i, яка дає $R_2 = \min_i \max_j\{V(a_i, S_j)\}$. Аналогічно в тому випадку, коли $V(a_i, S_j)$ відображає виграш, відповідно до максиміного критерію, вибирається альтернатива a_i, яка дає $R_2 = \max_i \min_j\{V(a_i, S_j)\}$.

<u>Приклад 5</u>.2. Користуючись критерієм Вальда, знайти розв'язок прикладу 5.1.

Розв'язання.

Оскільки $V(a_i, S_j)$ відображає втрати, використаємо мінімаксний критерій. Для знаходження найкращої альтернативи побудуємо таблицю.

Таблиця 5.2.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	$\max\limits_{j}\{V(a_i, S_j)\}$	
a_1	4	22	15	16	29	29	
a_2	10	15	26	12	10	26	
a_3	8	19	6	24	5	24	$\leftarrow \min\limits_{i}$
a_4	30	25	5	14	16	30	
a_5	15	5	30	22	9	30	

$R_2 = \min\{29; 26; 24; 30; 30\} = 24$.

Отже, мінімаксною альтернативою буде a_3. Отриманий результат співпадає з результатом прикладу 5.1.

5. 3. Критерій Севіджа

Використання критерію Вальда інколи приводить до суперечливих висновків. Розглянемо таку матрицю втрат (грн.).

		S_1	S_2	$\max\limits_{j}$	
$V(a_i, S_j)=$	a_1	50	210	210	
	a_2	150	200	200	$\leftarrow \min\limits_{i}$

Користуючись критерієм Вальда, приходимо до вибору альтернативи a_2. Інтуїтивно проситься вибрати a_1, оскільки не виключено, що $S = S_1$. Тоді втрати складуть тільки 50 грн. При виборі альтернативи a_2 втрати завжди будуть не меншими 150 грн.

Розглянемо критерій Севіджа, який грунтується на принципі мінімакса наслідків прийнятого помилкового рішення і старається мінімізувати втрачену вигоду. Його зміст полягає у формуванні нової матриці втрат $W(a_i, S_j)$ з допомогою наступної формули:

$$W(a_i, S_j) = \begin{cases} \max\limits_{k}\{V(a_k, S_j)\} - V(a_i, S_j), \text{якщо } V(a_i, S_j) - \text{прибуток} \\ V(a_k, S_j) - \min\limits_{k}\{V(a_i, S_j)\}, \text{якщо } V(a_i, S_j) - \text{втрати.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Отримані значення показують величину ризику, тому критерій Севіджа називають критерієм мінімального ризику. У першому випадку $W(a_i, S_j)$ є різницею найкращого значення в стовпці S_j і значенням $V(a_i, S_j)$. За змістом, $W(a_i, S_j)$ виражає «співчуття» особі, що приймала рішення, в зв'язку з тим, що вона не вибрала найкращої дії відносно стану S_j.

У другому випадку $W(a_i, S_j)$ відображає різницю $V(a_i, S_j)$ та найгіршого значення в стовпці S_j.

Незалежно від того, є $V(a_i, S_j)$ прибутком або втратами, функція $W(a_i, S_j)$ в обох випадках визначає втрати. Тому до $W(a_i, S_j)$ слід використовувати тільки мінімаксний критерій.

Отже, формула для вибору оптимальної альтернативи з допомогою критерія мінімального ризику набуває вигляду:

$$R_3 = \min_i \max_j W(a_i, S_j).$$

<u>Приклад</u> 5.3. Користуючись критерієм Севіджа, знайти розв'язок прикладу 5.1.

Розв'язання. Відповідно до умови прикладу 5.1 матриця $V(a_i, S_j)$ відображає втрати. Отже, для даного випадку має місце формула

$$W(a_i, S_j) = V(a_i, S_j) - \min_k \{V(a_k, S_j)\}, k = \overline{1,5}.$$

Знайдемо числові значення

$$\min_k \{V(a_k, S_1)\} = 4; \quad \min_k \{V(a_k, S_2)\} = 5;$$
$$\min_k \{V(a_k, S_3)\} = 6; \quad \min_k \{V(a_k, S_4)\} = 12;.$$
$$\min_k \{V(a_k, S_5)\} = 5, \qquad k = \overline{1,5}$$

Тоді шукана величина ризику $W(a_i, S_j)$ приймає вигляд (табл. 5.3).

Таблиця 5.3.

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	$\max_j \{W(a_i, S_j)\}$	
$W(a_i, S_j)=$	a_1	0	17	10	4	24	24	
	a_2	6	10	21	0	5	21	
	a_3	4	14	1	12	0	14	$\leftarrow \min_i$
	a_4	26	20	0	2	11	26	
	a_5	11	0	25	10	4	25	

Отримуємо, $R_3 = \min\{24;\ 21;\ 14;\ 26;\ 25\} = 14$.

Отже, найкращою альтернативою знову виявилася a_3.

Розглянутий критерій досить часто використовується в практичній діяльності при прийнятті управлінських рішень на тривалий період. Наприклад: при розподілі капітальних вкладень на перспективу він дає добрі результати.

5. 4. Критерій Гурвіца (критерій оптимізму-песимізму)

Критерій Гурвіца в своєму алгоритмі охоплює декілька підходів до прийняття рішень: від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного.

При найбільш оптимістичному підході можна вибрати альтернативу, яка дає $\max\limits_i \max\limits_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\}$, де $V\left(a_i, S_j\right)$ являє собою виграш (прибуток).

Аналогічно для найбільш песимістичних припущень вибрана альтернатива відповідає

$$\max_i \min_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\}. \qquad (5.3)$$

Критерій Гурвіца встановлює баланс між випадками крайнього оптимізму й крайнього песимізму, порівнюючи обидві альтернативи з допомогою відповідних коефіцієнтів α, та (α-1), де $0 \le \alpha \le 1$. Якщо $V\left(a_i, S_j\right)$ представляє прибуток, то вибираємо альтернативу, яка дає

$$R_4 = \max_i \left\lfloor \alpha \max_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\} - (1-\alpha) \min_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\} \right\rfloor. \qquad (5.4)$$

У випадку, коли $V\left(a_i, S_j\right)$ представляє втрати, критерій вибирає альтернативу, яка дає

$$R_4 = \min_i \left\lfloor \alpha \min_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\} + (1-\alpha) \max_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\} \right\rfloor. \qquad (8.5)$$

Параметр α являє собою показник оптимізму (ступінь впевненості): при α=1, критерій дуже оптимістичний; при $\alpha = 0$ – дуже песимістичний. Значення α ($0 \le \alpha \le 1$) може визначитися в залежності від характеру особи, яка приймає рішення, тобто, що їй більш характерно: песимізм або оптимізм. Чим складніша господарська ситуація, чим більше в ній хоче підстрахуватись ОПР, тим ближче до нуля вибирається α. Якщо α наближається до нуля, то збільшується невпевненість при досягненні успіху. Використання даного критерію ускладнюється при відсутності достатньої інформації про величину параметра α, який в силу суб’єктивних причин при різних рішеннях і в різних ситуаціях приймає різні значення. При відсутності інформації про явно виражений характер особи α приймається рівним 0.5.

Припустимо, що α = 0, тобто ОПР має мало надії на сприятливий наслідок, тоді отримаємо

$$R_4 = \max_i \left\{0 \cdot \max_j V\left(a_i, S_j\right) + (1-0) \cdot \min_j V\left(a_i, S_j\right)\right\} = \max_i \min_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\} = R_2 .$$

При абсолютній впевненості в досягненні успіху (значення α приймаємо за 1) маємо крайній оптимізм:

$$R_4 = \max_i \left\{1 \cdot \max_j V\left(a_i, S_j\right) + (1-1) \cdot \min_j V\left(a_i, S_j\right)\right\} = \max_i \max_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\}.$$

За умови, що ОПР не має змоги визначити коефіцієнт α, а компроміс між оптимістичним і песимістичним рішенням бажаний використовуємо вираз

$$R_4 = \begin{cases} \max\limits_i \left[\dfrac{\max\limits_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\} + \min\limits_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\}}{2} \right], \text{якщо} V\left(a_i, S_j\right) \text{- прибуток} \\ \min\limits_i \left[\dfrac{\max\limits_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\} + \min\limits_j \left\{V\left(a_i, S_j\right)\right\}}{2} \right], \text{якщо} V\left(a_i, S_j\right) \text{- втрати.} \end{cases} \qquad (5.6.$$

Приклад 5.4. Користуючись критерієм Гурвіца, знайти розв'язок прикладу 5.1.

Розв'язання.

Використовуємо критерій Гурвіца до умови прикладу 5.1. Покладемо α=0,5.

Для знаходження оптимального рішення побудуємо таблицю:

Таблиця 5.4.

	$\min\limits_j \{V(a_i, S_j)\}$	$\max\limits_j \{V(a_i, S_j)\}$	$\alpha \min\limits_j \{V(a_i, S_j)\} + (1-\alpha) \max\limits_j \{V(a_i, S_j)\}$	
a_1	4	29	16.5	
a_2	10	26	18	
a_3	5	24	14.5	$\leftarrow \min\limits_i$
a_4	5	30	17.5	
a_5	5	30	17.5	

$R_4 = \min\{16.5;\ 18; 14.5; 17.5;\ 17.5\} = 14.5 .$

Отже, оптимальне рішення полягає у виборі альтернативи a_3.

5. 5. Критерій Бейєса (максимум середнього виграшу)

Даний критерій використовується за умови, коли відомий розподіл ймовірностей відбуття станів системи. Припустимо, що нам відомі значення ймовірностей $\{p_j,\ j=\overline{1,m}\}$ настання станів системи $\{S_j,\ j=\overline{1,m}\}$, які задаються таким розподілом:

S_j	S_1	S_2	…	S_m	$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1, 0 \le p_j \le 1$
p_j	p_1	p_2	…	p_m	

Існування закону розподілу ймовірностей станів системи дає можливість визначити математичне сподівання корисності при виборі кожної альтернативи. Оптимальною вважається та альтернатива, яка забезпечує екстремальне (*min* або *max*) значення даного математичного сподівання:

$$R_5 = \begin{cases} \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \cdot \{V(a_i, S_j)\}, \text{ якщо } V(a_i, S_j) \text{ - прибуток} \\ \min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \cdot \{V(a_i, S_j)\}, \text{ якщо } V(a_i, S_j) \text{ - втрати.} \end{cases} \qquad (5.7.)$$

<u>Прикдад</u> 5.5. Користуючись критерієм Бейєса, знайти розв'язок прикладу 5.1, якщо відомі ймовірності станів {0.2; 0.15; 0.3; 0.25; 0.1}.

Розв'язання.

Розв'язок задачі представимо таблицею 5.5.

Таблиця 5.5.

Альтернатива	S_1		S_2		S_3		S_4		S_5		$\sum_{j=1}^{5} p_j \cdot V_{ij}$	$\min\limits_i$
	V_{i1}	V_{i1}*p1	V_{i2}	V_{i2}*p2	V_{i3}	V_{i3}*p3	V_{i4}	V_{i4}*p4	V_{i5}	V_{i5}*p5		
a_1	4	0.8	22	3.3	15	4.5	16	4.0	29	2.9	15.5	
a_2	10	2.0	15	2.25	26	7.8	12	3.0	10	1.0	16.05	
a_3	8	1.6	19	2.85	6	1.8	24	6.0	5	0.5	12.75	$\leftarrow \min\limits_i$
a_4	30	6.0	25	3.75	5	1.5	14	3.5	16	1.6	16.35	
a_5	15	3.0	5	0.75	30	9.0	22	5.5	9	0.9	19.15	
p_j	0.2		0.15		0.3		0.25		0.1			

Отже, оптимальним рішенням є вибір альтернативи a_3.

5. 6. Критерій мінімуму середнього ризику

Припустимо, що ОПР володіє інформацією про закон розподілу ймовірностей $\{p_j,\ j=\overline{1,m}\}$ настання станів системи $\{S_j,\ j=\overline{1,m}\}$, і ставить перед собою завдання мінімізувати середній ризик. У даному випадку критерій прийме вид:

$$R_6=\min_i \sum_{j=1}^{m} p_j W(a_i,S_j)=\min_i \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} P_j\left[\max\limits_k \left[V(a_k,S_j)\right]-V(a_i,S_j)\right], \text{ якщо } V(a_i,S_j)-\text{прибуток} \\ \sum\limits_{j=1}^{m} P_j\left[V(a_i,S_j)-\min\limits_k \left[V(a_k,S_j)\right]\right], \text{ якщо } V(a_i,S_j)-\text{витрати.} \end{cases} \quad (5.8)$$

<u>Приклад</u> 5.6. Користуючись критерієм мінімуму середнього ризику, знайти розв'язок прикладу 5.1, якщо відомі ймовірності станів {0.2; 0.15; 0.3; 0.25; 0.1}.

Розв'язання.

Для розв'язку даної задачі необхідно мати матрицю величин ризику $\left\|W(a_i,S_j)\right\|$, значення якої знайдені в прикладі 5.3.

Дальше використаємо формулу (5.8) і представимо розв'язок задачі таблицею 5.6.

Отже, оптимальною альтернативою знову буде a_3 .

5. 7. Критерій Ходжеса-Лемана

Даний критерій використовує два суб'єктивних показники: закон розподілу ймовірностей $\{p_j,\ j=\overline{1,m}\}$ настання станів системи $\{S_j,\ j=\overline{1,m}\}$ і параметр оптимізму α для критерію Гурвіца.

Для загального випадку критерій Ходжеса-Лемана визначається виразом:

$$R_7=\begin{cases} \max\limits_i \left[\alpha\sum\limits_{j=1}^{m} p_j V(a_i,S_j)+(1-\alpha)\min\limits_j V(a_i,S_j)\right], \text{ якщо } V(a_i,S_j)-\text{прибуток} \\ \min\limits_i \left[\alpha\sum\limits_{j=1}^{m} p_j V(a_i,S_j)+(1-\alpha)\max\limits_j V(a_i,S_j)\right], \text{ якщо } V(a_i,S_j)-\text{витрати,} \end{cases} \quad (5.9)$$

де $0\le \alpha \le 1$, $0\le p_j \le 1$, $\sum\limits_{j=1}^{m} p_j = 1$.

Приклад 5.7. Користуючись критерієм Ходжеса-Лемана, знайти розв'язок прикладу 5.1, якщо відомі ймовірності станів {0.2; 0.15; 0.3; 0.25; 0.1} та значення "параметрів оптимізму" {0.3; 0.6; 0.8}.

Поклавши в основу розрахунків формулу (5.9) і використовуючи результат прикладу 5.5, розв'язок даної задачі представимо таблицею 5.7.

Таблиця 5.7.

Альтерн.	$\sum_{j=1}^{5} p_j V(a_i, S_j)$	$\max_j V(a_i, S_j)$	$\alpha \sum_{j=1}^{5} p_j V(a_i, S_j) + (1-\alpha) \max_j V(a_i, S_j)$					
			α=0.3	$\min_i$	α=0.6	$\min_i$	α=0.8	$\min_i$
a_1	15.5	29	24.95		20.9		18.2	
a_2	16.05	26	23.015		20.03		18.4	
a_3	12.75	24	20.625	*min*	17.25	*min*	15.0	*min*
a_4	16.35	30	25.905		21.81		19.08	
a_5	19.15	30	26.745		23.49		21.32	

Результати отриманих розрахунків у табл. 5.7 за критерієм Ходжеса-Лемана для всіх значень α показують, що оптимальною альтернативою буде a_3.

Розглянемо можливі часткові випадки критерію Ходжеса-Лемана:

- α =1, отримуємо формулу критерію Бейєса;
- α = 0, отримуємо формулу критерію Вальда.

Оцінюючи необхідну початкову інформацію критерію Ходжеса-Лемана, можна зробити висновок про ступінь його складності. Основним недоліком розглянутого критерію є те, що в його алгоритмі використовується багато суб'єктивних факторів.

5. 8. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Сформулюйте основні причини невизначеності.
2. За допомогою чого задається вхідна інформація при прийнятті рішень в умовах невизначеності.
3. Які критерії покладені в основу прийняття рішень в умовах невизначеності?
4. За яких умов використовується критерій Лапласа та на чому він базується ?

5. Описати алгоритм використання критерію Вальда для прийняття рішень в умовах невизначеності.
6. Записати формулу, що покладена в основу критерію Севіджа.
7. Між чим і на основі чого встановлює баланс критерій Гурвіца в прийнятті рішень в умовах невизначеності?
8. За яких умов використовується критерій Бейєса і яка його розрахункова формула?
9. Записати формулу, що покладена в основу критерію Ходжеса-Лемана.
10. Акціонерне товариство випускає молочну продукцію, фасує її в ящики для подальшої реалізації в торгових точках міста. Імовірності того, що попит протягом дня на дану продукцію буде 5, 6, 7, 8 та 9 ящиків рівні відповідно 0.15, 0.2, 0.35, 0.12, 0.18. Витрати на випуск одного ящика складають 1.25 тис. грн. АТ продає кожен ящик по ціні 2.65 тис. грн. Якщо ящик із сировиною не реалізовується протягом дня, то сировина стає непридатною й товариство не отримує прибутку. Розрахувати оптимальну стратегію випуску продукту.
11. Розв'язати приклад 5.1, якщо матриця прибутків буде:

$$\left[V\left(a_i, S_j\right)\right] = \begin{bmatrix} 50 & 40 & 80 & 90 & 60 \\ 40 & 80 & 60 & 70 & 75 \\ 80 & 100 & 110 & 120 & 70 \\ 60 & 120 & 100 & 110 & 90 \\ 100 & 80 & 90 & 60 & 55 \end{bmatrix}.$$

Таблиця 5.6.

Альтернатива	S_1			S_2			S_3			S_4			S_5			$\sum_{j=1}^{5} p_j \cdot W_{ij}$	$\min_i$
	V_{i1}	W_{i1}	$p_i W_{i1}$	V_{i2}	W_{i2}	$P_i W_{i2}$	V_{i3}	W_{i2}	$P_3 W_{i3}$	V_{i4}	W_{i4}	$p_4 W_{i4}$	V_{i5}	W_{i5}	$P_5 W_{i5}$		
a_1	4	0	0	22	17	2.55	15	9	2.7	16	4	1.0	29	24	2.4	8.65	
a_2	10	6	1.2	15	13	1.95	26	20	6.0	12	0	0	10	5	0.5	9.65	
a_3	8	4	0.2	19	14	2.1	6	0	0	24	12	3.0	5	0	0	5.3	$\leftarrow \min_i$
a_4	30	26	5.2	25	23	3.45	5	2	0.6	14	2	0.5	16	11	1.1	10.85	
a_5	15	11	2.2	5	0	0	30	24	7.2	22	10	2.5	9	4	0.4	12.3	
Імовірність	**0.2**			**0.15**			**0.3**			**0.25**			**0.1**				

Тема 6. Теорія ігор та ігрове моделювання

6. 1. Основні поняття теорії ігор

При розв'язуванні ряду економічних задач дуже часто виникають конфліктні ситуації, які породжуються суперечливими інтересами виробничих або зацікавлених структур. Математичним апаратом розв'язку даного типу задач є теорія ігор, яка представляє собою теорію побудови математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту. Оскільки сторони, що беруть участь у вирішенні конфліктів, зацікавлені у прихованні своїх намірів від супротивника, прийняття рішень в умовах конфлікту виявляється переважно прийняттям рішень в умовах невизначеності. Фактор невизначеності в даній ситуації можна інтерпретувати як супротивника суб'єкта, що приймає рішення.

Логічною основою теорії ігор є формалізація трьох понять, які входять у її визначення й є базовими для всієї теорії: конфлікту, прийняття рішення в ньому та оптимальність цього рішення. Ситуація називається конфліктною, якщо в ній приймають участь сторони, інтереси котрих повністю чи частково протилежні. Гра – це дійсний або формальний конфлікт, в якому беруть участь хоч би два учасники (гравці), кожний із яких прагне досягти власної мети. Допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення деякої мети, називаються правилами гри. Кожний гравець має деяку множину (скінченну чи нескінченну) можливих виборів, яка називається стратегіями. Стратегія гравця називається оптимальною, якщо при багатократному повторенні гри вона забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш (або мінімально можливий програш).

В основу класифікації ігор покладено такі ознаки: кількість гравців, кількість стратегій, характер взаємовідносин, характер виграшів, вигляд виграшів, кількість ходів, стан інформації (табл. 6.1).

Залежно від кількості гравців існують ігри: одного гравця, двох гравців, *k*-гравців. Гра називається парною, якщо в ній приймають участь тільки дві сторони (дві особи). Щодо кількості стратегій ігри діляться на скінченні та

Таблиця 6.1.

№ п/п	Класифікаційні ознаки	Групи ігор
1	Число гравців	1. Одного гравця 2. Двох гравців 3. *k*- гравців
2	Кількість стратегій	1. Скінченні 2. Нескінченні
3	Характер взаємовідносин	1. Безкоаліційні 2. Кооперативні 3. Коаліційні
4	Характер виграшів	1. Нульовою сумою 2. Ненульовою сумою
5	Вигляд функції виграшів	1. Матричні 2. Біматричні 3. Неперервні 4. Випуклі 5. Сепарабельні 6. Типу дуелі
6	Кількість ходів	1. Однокрокові 2. Багатокрокові (позиційні, стохастичні, диференціальні, типу дуелі).
7	Стан інформації	1. З повною інформацією 2. З неповною інформацією

нескінченні. Якщо в грі кожен із гравців має скінченне число стратегій, то вона називається скінченною. Якщо ж хоч би один із гравців має нескінченну кількість можливих стратегій, то така гра буде називатися нескінченною. За характером взаємовідносин гравців ігри поділяються на безкоаліційні, кооперативні та коаліційні. Безкоаліційними називають ігри, в яких гравці не мають права домовлятися між собою, тобто утворювати коаліції. У кооперативній грі коаліції наперед відомі.

За характером виграшів ігри поділяються на ігри з нульовою сумою та ігри з ненульовою сумою. Гра називається грою з нульовою сумою, якщо сума виграшів усіх гравців у кожній її партії дорівнює нулю, тобто загальний капітал усіх гравців не змінюється, а тільки перерозподіляється між гравцями залежно від отриманих наслідків.

Залежно від виду функції виграшів ігри діляться на матричні, біматричні, неперервні, випуклі, сепарабельні, типу дуелі тощо.

Відносно кількості ходів ігри поділяють на однокрокові й багатокрокові. Однокрокові ігри закінчуються після закінчення одного ходу кожного гравця. Багатокрокові ігри поділяються на позиційні, стохастичні, диференціальні, типу дуелі тощо.

Залежно від стану інформації розрізняють ігри з повною та неповною інформацією. Якщо на кожному кроці гри кожному гравцеві відомо, які дії були зроблені гравцями раніше, то така гра називається грою з повною інформацією, якщо ж не все відомо про попередні дії, то – грою з неповною інформацією.

6. 2. Оптимальний розв'язок в іграх двох осіб з нульовою сумою

Розглянемо гру, в якій беруть участь два гравці, один з яких може дотримуватися стратегії i з n своїх можливих стратегій (i =1, 2,…, n), а другий, не знаючи вибору першого, вибирає стратегію j із m своїх можливих стратегій (j =1, 2, …, m). У результаті перший гравець (A) виграє a_{ij} , а другий (B) програє цю величину.

Величини a_{ij} утворюють платіжну матрицю (матрицю гри):

$$[a_{ij}] = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & \cdots & B_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}. \tag{6.1}$$

Рядки матриці [a_{ij}] відповідають стратегіям (A_1, ..., A_n) гравця A. А стовпці – стратегіям (B_1, ..., B_m) гравця B. Дані стратегії називаються чистими. Будемо вважати, що при $a_{ij} > 0$ гравець A виграє, а гравець B програє величину a_{ij}. Якщо $a_{ij} < 0$, то навпаки, виграє гравець B і програє гравець A.

Спочатку знайдемо найкращу із стратегій гравця A, тобто найкращу серед A_1, ..., A_n з урахуванням можливих варіантів відповідей на неї гравця B. При цьому необхідно враховувати те, що на довільну стратегію A_i гравець B відповідає стратегією B_j, для якої виграш гравця A буде мінімальним. Для знаходження стратегії B_j необхідно в i-му рядку платіжної матриці знайти $\alpha_i = \min\limits_j \{a_{ij}\}$. При зміні стратегії гравця A одночасно будуть змінюватися відповідні їм числа α_i. Зрозуміло, що гравцеві A вигідно завжди зупинятися на такій стратегії A_i, для якої значення $\alpha = \max\limits_i \{a_i\}$, або, враховуючи представлення α_i, отримаємо $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j \{a_{ij}\}$.

Число α називається нижньою ціною гри чи максиміном, а відповідна йому стратегія (рядок) – максимінною.

Якщо гравець A буде дотримуватися максимінної стратегії, то йому, при довільній поведінці гравця B, у будь-якому випадку гарантований виграш, не менший α. Аналогічно можна визначити найкращу стратегію для гравця *B*, мета якого – привести виграш гравця *A* до мінімуму. Для цього гравець *B* прагне для кожної своєї стратегії B_j отримати максимальне значення виграшу при довільній стратегії гравця A_i, тобто він шукає значення $\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}$. Проте гравець *B* не може розраховувати на те, що гравець *A* дозволить йому отримати будь-який із виграшів β_j. Єдине, на що може розраховувати гравець *B*, то це на те, щоб отримати виграш, який буде не меншим величини $\beta = \min_j \max_i \{a_{ij}\}$. Величина β називається верхньою ціною гри, чи мінімаксом, а відповідна йому стратегія гравця (стовпець)- мінімаксною. Мінімаксна стратегія – найобережніша стратегія для гравця *B*. Вона забезпечує йому в будь-якому випадку програш, не більший β, і відповідно виграш гравцеві *A,* теж не більший від β. Якщо $\alpha = \beta = v$, то число *v* називається ціною гри.

Гра, для якої $\alpha = \beta$, тобто мінімаксне значення рівне максимінному, називається грою із сідловою точкою. Для гри зі сідловою точкою розв'язок полягає у виборі максиміної й мінімаксної стратегії, що є оптимальними. "Оптимальність" тут означає, що жоден гравець не прагне змінити свою стратегію, оскільки його суперник може відповісти на це вибором іншої стратегії, яка може дати гірший результат для першого. Взагалі значення гри повинно задовільняти нерівність:

[Максимінне значення] ≤ [Значення гри] ≤ [Мінімаксне значення]

Приклад 9.1. Підприємства *A* та *B* виробляють два конкуруючих види продукції. У даний час кожний вид продукції "контролює" 50% ринку. Для покращення якості продукції підприємства планують розгорнути рекламні заходи. Якщо обидва підприємства не будуть цього робити, то стан ринку не зміниться. Обстеження ринку показує, що 50% потенційних покупців отримують інформацію через телебачення, 30% - через пресу й останні 25% - через радіомовлення.

Мета кожного підприємства – вибрати ефективні засоби реклами. Дану задачу необхідно сформулювати як гру двох осіб з нульовою сумою та знайти оптимальні стратегії.

Розв'язання. Учасниками гри є два підприємства *A* і *B*. Кожен із гравців має три стратегії використання реклами – телебачення (1), преса (2) й радіомовлення (3). Якщо обидва гравці виберуть для реклами своєї продукції однакові засоби інформації, то їхній вплив на ринок не зміниться. Припустимо, що якщо підприємство A вибрало як засіб реклами телебачення (A_1), то підприємство B може вибрати для реклами телебачення (B_1), пресу (B_2), чи радіомовлення (B_3). У результаті такого вибору вплив на ринок для A в першому випадку не зміниться, в другому й третьому відповідно збільшиться на 20% і 30%. Якщо підприємство A вибере за стратегію рекламу через пресу (A_2), то B може вибрати телебачення (B_1), пресу (B_2), чи радіомовлення. Тоді в першому випадку підприємство A втратить 20% споживачів, у третьому – попит зросте на 10%. Аналогічно аналізуємо третю стратегію. Остаточно отримуємо платіжну матрицю $[a_{ij}]$:

		B			min в рядках
		B_1	B_2	B_3	
A	A_1	0	20	30	0 ← максмін
max →	A_2	-20	0	10	-20
у стовпцях	A_3	-30	-10	0	-30
	0	20	30		
	↑ мінімакс				

Знайдемо нижню та верхню ціни даної гри:

$$\alpha = \max_i \min_j \{a_{ij}\} = \max\{0;-20;-30\} = 0;$$

$$\beta = \min_j \max_i \{a_{ij}\} = \min\{0;20;30\} = 0.$$

Оскільки $\alpha = \beta = 0$, то гра має сідлову точку. Оптимальними будуть стратегії A_1 для підприємства A і B_1 для B, тобто обом підприємствам слід використати для реклами телебачення, як засіб інформації.

6. 3. Змішані стратегії

Наявність у грі сідлової точки дає можливість визначити необхідні оптимальні стратегії. Але деякі ігри не завжди мають сідлові точки, тобто максимінно-мінімаксні стратегії неоптимальні. Це призводить до того, що кожний із гравців може поліпшити своє становище, вибравши іншу стратегію. У даному випадку виникає потреба у використанні змішаних стратегій.

Змішані стратегії – це математична модель можливої й гнучкої тактики гравця, при якій супротивний йому гравець не може знати наперед ситуацію, з якою йому прийдеться зіткнутись у грі, тому перед кожною партією проводиться випадковий вибір однієї з чистих стратегій з допомогою деякого механізму, який здійснює цей вибір із визначеними й наперед заданими ймовірностями.

Розглянемо гру двох осіб, матриця платежів якої має розмірність $n \times m$. Нехай гравець A має n стратегій, а гравець B - m стратегій. Позначимо через $p = (p_1 , p_2 ,...p_n)$ і $q = (q_1, q_2,,...,q_m)$ вектори ймовірностей, з якими гравці A та B відповідно вибирають свої чисті стратегії. Оскільки ці стратегії за умовою гри повністю вичерпують можливі ходи гравців A і B, то вони утворюють повну групу подій. Тому має місце: $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j$. (6.2)

Якщо a_{ij} – (i, j)-й елемент матриці гри, то платіжна матриця має вигляд

Відповідно до основної теореми теорії ігор кожна скінченна гра має хоч би один розв'язок, який визначає певна змішана стратегія.

			B_1	B_2	…	B_m
			q_1	q_2	…	q_m
	A_1	p_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
A	…	…	⋮		…	⋮
	A_n	p_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

Методика визначення розв'язку гри при змішаних стратегіях в основному також грунтується на використанні критерію мінімаксу. Різниця полягає в тому, що гравець A вибирає P_i так, щоб максимізувати найменший сподіваний виграш (математичне сподівання) по стовпцях, тоді як гравець B вибирає q_j з метою мінімізації найбільшого сподіваного виграшу по рядах. Математично критерій мінімаксу для змішаних стратегій описується наступним чином. Гравець A вибирає стратегію A_i, яка дає

$$\max_{P_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} p_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2} p_i, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{im} p_i\right)\right\}, \qquad (6.3)$$

а гравець B вибирає стратегію B_j, яка дає

$$\min_{q_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j} q_j, \sum_{j=1}^{m} a_{2j} q_j, ..., \sum_{j=1}^{m} a_{nj} q_j\right)\right\}. \qquad (6.4)$$

Ці величини визначаються відповідно як сподівані максимінні та мінімаксні платежі. При цьому має місце співвідношення:

$$\begin{bmatrix} \text{Мінімаксний сподіваний} \\ \text{програш} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \text{Максиміний сподіваний} \\ \text{виграш} \end{bmatrix}.$$

Якщо p_i і q_j відповідають оптимальним розв'язкам, тобто виконується строга рівність, то результуюче значення дорівнює сподіваному (оптимальному) значенню гри. Якщо p_i^* **і** q_j^* оптимальні розв'язки для обох гравців, то кожному елементу платіжної матриці відповідає ймовірність $p_i^* q_j^*$. Отже, оптимальне сподіване значення (ціна) гри

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i^* q_j^* . \tag{6.5}$$

Для знаходження оптимальних стратегій в іграх двох осіб з нульовою сумою можна використати графічний метод (для ігор виду $2 \times m$ або $2 \times n$), а також привести задачу до лінійного програмування.

6.4. Графічний метод розв'язку ігор виду 2 × *m* і *n* × 2

Розглянемо гру виду $2 \times m$, яка не має сідлової точки.

			B			
			B_1	B_2	…	B_m
			q_1	q_2	…	q_m
A	A_1	p_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
	A_2	$p_2=1-p_1$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}

Оскільки гравець A має дві стратегії (A_1 і A_2), то $p_2 = 1 - p_1$. Знайдемо сподівані виграші (математичне сподівання гравця) A залежно від чистих стратегій гравця B:

$$M_j(p_1) = a_{1j} \cdot p_1 + a_{2j} \cdot p_2 = (a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j},\ j = \overline{1,m}. \tag{6.6}$$

Отримані результати представимо у вигляді табл. 9.2.

Таблиця. 62.

Чисті стратегії гравця B	Сподівані виграші гравця A
1	$(a_{11}-a_{21})p_1 + a_{21} = M_1(p_1)$
2	$(a_{12}-a_{22})p_1 + a_{22} = M_2(p_1)$
⋮	⋮
m	$(a_{1m}- a_{2m})p_1 + a_{2m} = M_m(p_1)$

Із таблиці 6.2. випливає, що сподіваний виграш гравця A $M_j(p_1)$ лінійно залежить від p_1 і являє собою пряму лінію.

Мета гравця B полягає в мінімізації виграшу гравця A за рахунок вибору своїх стратегій, тобто $M(p_1)=\min\limits_j\{M_j(p_1)\}$. На рис. 6.1 точка M^* означає значення $M(p_1^*)$, яке дістали при $p_1=p_1^*$. Ціна гри $v=M(p_1^*)$. Таким чином, графічно визначається оптимальна змішана стратегія $p_1=p_1^*$ першого гравця і пара частих стратегій другого гравця, які в перетині утворюють точку M^* (на рис. 6.1 це відповідає II і III стратегіям гравця B).

Розв'язавши систему рівнянь $M_j(p_1)=v(j=2,3)$, знайдемо точне значення p_1^* і v. Після цього, надавши $q_j=0$ для тих j, для яких $M_j(p_1)$ не утворюють точку M^*, можемо знайти значення q_j для тих j, для яких $M_j(p_1)$ утворюють точку M^*, розв'язавши систему

$$\begin{cases} a_{12}q_2+a_{22}q_3=v \\ a_{13}q_2+a_{23}q_3=v \end{cases}. \tag{6.7}$$

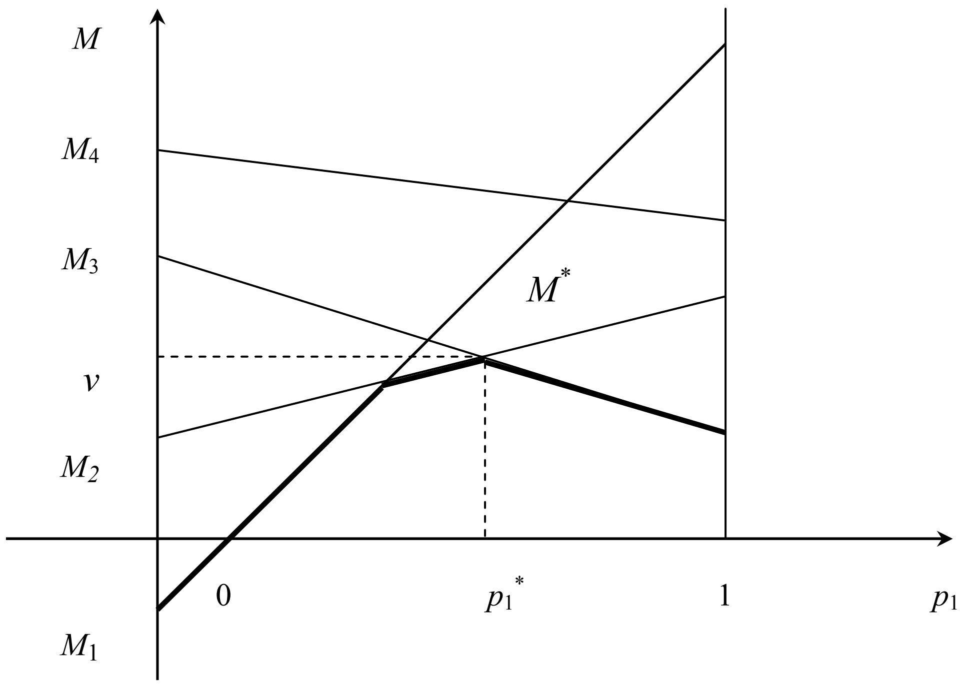


Рис. 6.1

Приклад 6.2_ На основі наявного добового обсягу сировини підприємство має можливість випускати два види продукції, яка швидко псується. Прибуток підприємства залежить від обсягу реалізованої продукції кожного виду, яка в свою чергу залежить від погоди.

Реалізація першого виду продукту вища за теплої погоди, другого – за прохолодної. Стан погоди можна розглядати як такі стратегії природи: день пекучий сухий, пекучий вологий, теплий сухий, теплий вологий, прохолодний сухий, прохолодний вологий. Відома матриця прибутку (тис. грн.) підприємства за кожним видом продукції залежно від стану погоди:

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

За допомогою графічного методу знайти оптимальні стратегії по організації випуску продукції підприємством.

Розв'язання. Побудована гра не має сідлової точки в чистих стратегіях, тому для визначення оптимальних стратегій можна скористатися графічним методом. Стратегіями підприємства є виробництво продукції першого або другого виду. Будемо вважати підприємство першим гравцем, а природу – другим. Позначимо через p_1 імовірність використання своєї першої стратегії першим гравцем, через $q(q_1, q_2, \ldots, q_6)$ – змішану стратегію другого гравця. Побудуємо графіки середніх виграшів першого гравця (рис. 9.2.), для цього знайдемо $M_{\text{j}}(p_1)$:

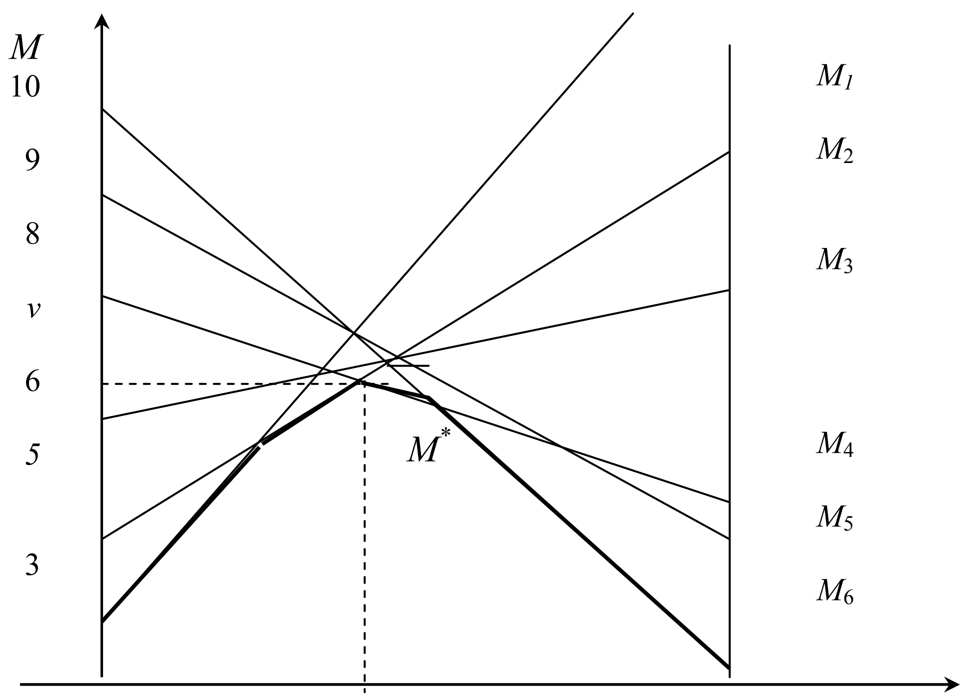


Рис. 6.2

$M_1(p_1)=(12-3)p_1+3=9p_1+3; \quad M_2(p_1)=(9-5)p_1+5=4p_1+5;$
$M_3(p_1)=(7-6)p_1+6=p_1+6; \quad M_4(p_1)=(5-8)p_1+8=-3p_1+8;$
$M_5(p_1)=(4-9)p_1+9=-5p_1+9; \quad M_6(p_1)=(2-10)p_1+10=-8p_1+10.$

Нижня границя множини обмежень зображена на рис. 6.2 жирною лінією. Як бачимо, *maxM* (p_1) досягається в точці M^*, що утворюється лініями $M_1(p_1)$ і $M_4(p_1)$. Покладемо $q_2= q_3= q_5= q_6=0$. Для знаходження p_1, p_2, q_1, q_4, v необхідно розв'язати такі системи рівнянь:

$$\begin{cases} 12p_1+3p_2=v, \\ 5p_1+8p_2=v, \\ p_1=1-p_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 12q_1+3q_4=v, \\ 5q_1+8q_4=v, \\ q_2=1-q_1. \end{cases} .$$

Розв'язками цих систем буде:

$$p_1=\frac{5}{12};\ p_2=\frac{7}{12};\ q_1=\frac{5}{12};\ q_4=\frac{7}{12};\ v=\frac{27}{4}\text{млн.грн.}$$

Ми отримали такий оптимальний розв'язок.

Підприємству необхідно 5/12 обсягів сировини використати на виготовлення першого виду продукції, а 7/12 – для другого виду продукції. При цьому отримаємо максимальний прибуток у розмірі 6.75 млн. грн.

6.5. Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування

Розглянемо матричну гру $n \times m$, задану матрицею $\lfloor a_{ij} \rfloor$. Позначимо через $p^*=(p_1^*, p_2^*,..., p_n^*), q^*=(q_1^*, q_2^*,..., q_m^*)$ імовірності оптимальних змішаних стратегій відповідно першого та другого гравців, а через v- ціну гри. Без доведення сформулюємо теорему.

Теорема. Для того, щоб число v було ціною гри, а p^* *і* q^* *- векторами ймовірностей оптимальних стратегій, необхідне й достатнє виконання системи нерівностей:*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^* \ge v,\ j=\overline{1,m}, & (6.8) \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j^* \le v,\ i=\overline{1,n}. & (6.9) \end{cases}$$

Для простоти припустимо, що $v > 0$. Цього завжди можна досягнути завдяки додаванню до всіх елементів матриці $\lfloor a_{ij} \rfloor$ одного й того ж постійного числа *k*. Така процедура не вплине на оптимальні стратегії, а тільки збільшить ціну гри на *k*.

Мета першого гравця полягає в отриманні максимального виграшу, а другого – мінімального програшу. Користуючись сформульованою теоремою, задачу максимізації гарантованого виграшу першого гравця і задачу мінімізації гарантованого програшу другого гравця можна представити як пару взаємно двоїстих задач лінійного програмування:

Завдання I гравця

$$\begin{aligned} & Z^* = v \to \max \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^* \ge v, \ j = \overline{1,m} \\ & \sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1 \\ & p_i^* \ge 0, i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Завдання II гравця

$$\begin{aligned} & F^* = v \to \min \\ & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j^* \le v, i = \overline{1,n} \\ & \sum_{j=1}^{m} q_j^* = 1 \\ & q_j^* \ge 0, \ j = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Запишемо систему обмежень (6.10) у розширеній формі:

$$\begin{aligned} & a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + ... + a_{n1} p_n^* \ge v \\ & \vdots \\ & a_{1m} p_1^* + a_{2m} p_2^* + ... + a_{nm} p_n^* \ge v \\ & p_1^* + p_2^* + ... + p_n^* = 1. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Поділимо праву й ліву частину нерівності на *v*. Отримуємо:

$$\begin{aligned} & a_{11} p_1^* / v + a_{21} p_2^* / v + ... + a_{n1} p_n^* / v \ge v / v \\ & \vdots \\ & a_{1m} p_1^* / v + a_{2m} p_2^* / v + ... + a_{nm} p_n^* \ge v / v \\ & p_1^* / v + p_2^* / v + ... + p_n^* / v = 1 / v \end{aligned} . \tag{6.13}$$

Зробимо заміну: $\dfrac{p_i^*}{v} = x_i, i = \overline{1,n}$. Маємо:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{n1}x_n \geq 1$$
$$\vdots \tag{6.14}$$
$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + ... + a_{nm}x_n \geq 1.$$

Відомо, що $\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1$. Отже, $\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^*}{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Звідси: $\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{v}$.

Оскільки метою першого гравця є максимальний виграш, то він має забезпечити $min\frac{1}{v}$. Отже, визначення оптимальної стратегії для першого гравця зводиться до вирішення такої задачі лінійного програмування:

знайти $Z = x_1 + x_2 + ... + x_n \to \min$ при виконанні умов

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + ... + a_{n1}x_n \geq 1 \\ &\vdots \\ &a_{1m}x_1 + ... + a_{nm}x_n \geq 1 \\ &x_i \geq 0, i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Аналогічні міркування можна провести відносно задачі другого гравця. Виконавши заміну $\frac{q^*}{v} = y_j$, отримаємо наступну задачу:

знайти $F = y_1 + y_2 + ... + y_m \to \max$ при виконанні умов

$$\begin{aligned} &a_{11}y_1 + ... + a_{1m}y_m \leq 1 \\ &\vdots \\ &a_{n1}y_1 + ... + a_{nm}y_n \leq 1 \\ &y_m \geq 0, i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Задача другого гравця є двоїстою до задачі першого гравця.

Процес знаходження розв'язку гри з використанням лінійного програмування складається з таких етапів:

I – побудова пари двоїстих задач лінійного програмування, еквівалентних даній матричній грі;

II – знаходження оптимальних планів пари двоїстих задач;

III – знаходження розв'язку гри, використовуючи співвідношення між планами двоїстих задач і оптимальними стратегіями та ціною гри.

<u>Приклад 6</u>.3. Дві фірми можуть вкласти свій наявний капітал у будівництво п'яти об'єктів. Стратегія фірм: *i*-та стратегія полягає у

фінансуванні i-го об'єкту (i = 1, 2, …,5). Враховуючи особливості вкладів й інші умови, прибуток фірми виражається за допомогою матриці *A:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Прибуток першої фірми є величиною збитку другої, тобто дану гру можна розглядати як гру двох осіб з нульовою сумою.

Розв'язання. Для зведення даної задачі до задачі лінійного програмування необхідно, насамперед, до кожного елементу матриці додати число k = 4 (необхідно, щоб усі елементи матриці A були додатніми). Отримуємо:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Вводимо невідомі величини x_1, x_2, …, x_5. Тоді отримуємо таку задачу лінійного програмування:

знайти $\quad Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min$

при виконанні умов

$$\begin{aligned} &6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 \geq 1 \\ &4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \geq 1 \\ &5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 4x_5 \geq 1 \\ &x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \geq 1 \\ &8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 \geq 1 \\ &x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

Розв'язком цієї задачі буде

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0.125; x_4 = 0; x_5 = 0.125.$$

Оскільки $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \dfrac{1}{v}$, то

$$v = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = \frac{1}{0.125 + 0.125} = \frac{1}{0.25} = 4.$$

Знаючи те, що $x_i = \frac{p_i}{v}$, отримуємо: $p_i = x_i \cdot v$; $p_1 = 0$; $p_2 = 0$; $p_3 = 0.5$; $p_4 = 0$; $p_5 = 0.5$.

Побудуємо до даної задачі двоїсту. За невідомі візьмемо y_1, y_2, y_3, ;y_4, y_5. Маємо

$$F = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to \max$$

при виконанні умов

$$\begin{aligned}
&6y_1 + 4y_2 + 5yx_3 + y_4 + 8y_5 \le 1\\
&4y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 8y_4 + 7y_5 \le 1\\
&6y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 6y_4 + 3y_5 \le 1\\
&4y_1 + y_2 + 5y_3 + 4y_4 + 5y_5 \le 1\\
&7y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 6y_5 \le 1\\
&y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5}.
\end{aligned}$$

Розв'язком цієї задачі буде $y_1 = 0; y_2 = 0.25; y_3 = 0; y_4 = 0; y_5 = 0$. Користуючись формулою $y_i = \frac{q_i}{v}$, знайдемо:

$$q_i = y_i \cdot v; q_1 = 0; q_2 = 1; q_3 = 0; q_4 = 0; q_5 = 0.$$

Отже, вектори ймовірностей оптимальних змішаних стратегій відповідно для першої та другої фірми будуть: $p = (0; 0; 0.5; 0; 0.5)$; $q = (0; 1; 0; 0; 0)$, а ціна початкової гри $v^* = v - 4 = 0$.

6.6. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Які ознаки покладені в основу класифікаці ігор?
2. Сформулювати економічну постановку задачі визначення оптимального розв'язку в іграх двох осіб з нульовою сумою.
3. Яка гра має назву гри з сідловою точкою?
4. Що таке змішані стратегії?
5. На чому грунтується методика визначення розв'язку при змішаних стратегіях?
6. Описати алгоритм графічного методу розв'язку ігор виду $2 \times m$ і $n \times 2$.

7. Описати методику зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування.
8. З яких етапів складається процес знаходження розв’язку гри з використанням лінійного програмування?
9. Розв’язати приклад 6.3, якщо:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & -3 & -5 & 8 \\ 4 & -2 & 0 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & -6 & -7 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 5 & -6 \\ 8 & 0 & -5 & -4 & 9 & -9 \end{bmatrix}.$$