Конспект лекцій з дисципліни
«Економіко-математичне моделювання»
Модуль 1 — «*Математичне програмування*»
Модуль 2 — «*Економетрія*»
Модуль 3 — «*Економічний ризик і методи його вимірювання*»

« Математичне програмування»

Лекція №1
Постановка задач математичного програмування.

План

1. Історична довідка
2. Предмет математичного програмування.
3. Математичне моделювання задач .
4. Класифікація задач МП.
5. Стандартні форми ЗЛП.

1. В суто математичному плані деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Однак, сучасне математичне програмування передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці. Справжнім початком математичного програмування в сучасному розумінні вважають праці радянського вченого Л. В. Канторовича. Наприкінці 30-х років у Ленінградському університеті ним уперше були сформульовані та досліджувались основні задачі, критерії оптимальності, економічна інтерпретація, методи розв'язання та геометрична інтерпретація результатів розв'язання задач лінійного програмування (1939 року Л. В. Канторович оприлюднив монографію «Математичні методи організації і планування виробництва»). Сам термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса. Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л. В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні, яке уможливлює підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами.

1947 року Дж. Данцигом також був розроблений основний метод розв'язування задач лінійного програмування — симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п'ятдесяті роки. У цей час з'являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків математичного програмування: 1951 року — праця Г. Куна і А. Таккера, в якій наведено необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року — Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року — ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У п'ятдесятих роках сформувався новий напрямок математичного програмування — динамічне програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Белман.

На сучасному етапі математичне програмування включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем. Розробляються банки економіко-математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних галузях економіки.

2. Назва дисципліни «Математичне програмування» асоціюється передусім з програмуванням як процесом створення програм для ПЕОМ за допомогою спеціальної мови. Проте насправді це лише не дуже вдалий переклад англійського терміну *mathematical programming,* що означає розроблення на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети. В економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, подібні за постановкою, що мають ряд спільних ознак та розв'язуються подібними методами. Типова постановка задачі математичного програмування така: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів вибрати найкращий. З цією метою використовуються математичні методи.

Реальні економічні задачі є достатньо складними, в яких, наприклад, кількість ресурсів та видів продукції може сягати сотень найменувань, і тоді простий перебір всієї множини варіантів абсолютно неможливий. Отже, постає необхідність розроблення спеціальних математичних методів розв'язання таких задач, тобто математичного обґрунтування найефективніших виробничих програм. Саме зі словом «програма» і пов'язана назва предмета — «математичне програмування».

Пошук реального оптимального плану є, як правило, складним завданням і належить до екстремальних задач, в яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції за визначених обмежень.

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, *предметом* якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об'єктами математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору **є** знаходження розв'язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Розв'язання екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Математична модель економічного об'єкта (системи) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

3. Математизація різноманітних галузей знань на сьогоднішні час не є чимось новим та несподіваним. Математичні методи широко застосовуються в сфері соціально – економічних, екологічних, технічних, міжнародних відносин. Найрізноманітніші прикладні науки, такі як менеджмент, прийняття управлінських рішень, соціально – економічне прогнозування використовують математичний апарат для вирішення своїх проблем і навіть стимулюють розвиток прикладних галузей математики.

Використання сучасних методів моделювання зумовлено:

- загальною тенденцією розширення та поглиблення дослідження процесів в реальному фізичному світі;
- значною тривалістю ряду процесів (екологічних, хіміко - технологічних);
- практичною неможливістю отримувати необхідну інформацію, досліджуючи об’єкт – оригінал (об’єкти макро- та мікросвіту);

- неповними достовірними данними про фізичний об’єкт, що реально існує;

- складністю протікання реальних процесів;

- відсутністю належних умов чи кваліфікації персоналу для проведення досліджень;

- необхідністю проведення великої кількості експериментів, коли тривале дослідження стає економічно недоцільним;

- відсутністю самого об’єкту, що знаходиться на стадії проектування.

Терміни “модель”, “моделювання” ми часто використовуємо в реальному житті, вкладаючи подекуди в них зовсім різні поняття. При розгляді моделювання як універсального методу наукового пізнання доцільно ввести наступне означення моделі.

Модель – це матеріальна або розумово – уявна система чи фізичний об’єкт, яка в процесі дослідження замінює об’єкт – оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об’єкт.

Під *моделюванням* розуміють процес формалізації фізичного об’єкта метою якого є створення певного його аналога – моделі, що адекватна об’єктові. Моделювання – це триєдиний процес побудови, вивчення та застосування моделей.

Всі моделі можуть бути умовно поділені на декілька видів.

I) Фізичні моделі є об’єктами, що існують реально і створюються з реальних матеріалів. Це дійсне відтворення реально існуючого об’єкту. Сюди відносять:

А) *Геометрично подібні* моделі (макети різних установок, приладів, будов). Вони використовуються у зменшеному масштабі для того, щоб мати просторову уяву про об’єкт, компоновку його елементів, взаємне розміщення їх в просторі.

Б) *Фізично подібні* моделі (дослідження процесів продування моделі крила літака в аеродинамічній трубі). Вони створюються для того, щоб краще зрозуміти фізичні процеси, що вивчаються, їх кінетику та динаміку, виявлення найважливіших закономірностей та функціональних залежностей.

В) *Математично подібні* моделі (аналогові моделі руху рідин та газів, що описуються однаковими диференціальними рівняннями як плинність електричного струму). Створені для вивчення складних процесів (наприклад, транспонування рідини чи газу) за допомогою їх простіших аналогів (електричної моделі).

II) Уявні моделі існують в голові дослідника, на папері, магнітних носіях у вигляді певних уявних образів: формул, таблиць, знаків, схем тощо. Вони поділяються на:

А) *Образні моделі* побудовані з чуттєво – наглядних ідеальних елементів, що використовуються для наближеного опису реальних явищ (абсолютно чорне тіло, пружні кульки, ідеальний газ і т.д.).

Б) *Знакові моделі* відзначаються повною відсутністю подібності між досліджуваним об'єктом та його моделлю. Наприклад, заміна міста – точки відправлення поїзда буквою (Задача «З міста А в місто В йде поїзд…»).

В) *Образно – знакові* є поєднанням попередніх двох видів.

Одним з підвидів знакових моделей є математичні моделі. **Математична модель** фізичного об'єкта – це сукупність математичних співвідношень (рівнянь, формул, графіків), що пов'язують вихідні характеристики стану об'єкта з вхідною інформацією, геометричними та іншими обмеженнями іншою інформацією, шо накладається на функціонування об'єкту. Математична модель знаходиться у відповідності з об'єктом і здатна замінити його з метою отримання нової інформації про його поведінку.

Особливостями математичних моделей є:

- наближенність опису;
- врахування тільки основних чинників;
- компроміс між простотою та повнотою опису;
- обмеженність застосування;
- відмінність математичних моделей від закону (неабсолютність математичної моделі);
- адекватність.

Математичне моделювання – це комплексне дослідження властивостей фізичного об'єкту з допомогою створеної його математичної моделі (найчастіше з використанням ЕОМ).

В різних сферах застосування етапи процесу моделювання мають свої специфічні риси, але в усіх випадках можна виділити декілька етапів, що присутні завжди. Визначимо одну з пропонованих на сьогоднішній день класифікацій:

1. *Постановка проблеми та її якісний аналіз*. Тут виділяють найважливіші риси та властивості модельованого об'єкту та абстрагують другорядні, вивчають структуру та взаємозв'язок елементів, формулюють основні гіпотези (хоча би попередні).

2. *Побудова математичної моделі*. Це етап формалізації проблеми, вираження її у вигліді конкретнихматематичних залежностей та відношень. Як правило, спочатку визначається основна конструкція задачі (тип моделі), а потім відбувається уточнення окремих деталей.

3. *Математичний аналіз моделі.* Виясняються загальні властивості моделі, доводиться теорема існування розв'язку задачі (інакше наступні дослідження не проводяться), виясняють чи єдиний роозв'язок, які змінні в ходитимуть в розв'язок та в якому співвідношенні, в яких межах та з якою тенденцією вони змінюватииуться.

4. *Підготовка вихідної інформації.* Тут використовують методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

5. *Чисельний розв'язок*. Розробляються алгоритми для розв'язування задачі, складаються програми для ПК. Завдяки швидкодії ЕОМ можна провести багаточислені експерименти з різними вихідними умовами та параметрами.

6. *Аналіз чисельних результатів та їх застосування*. Повністю вивчається питання про правильність та повноту результатів моделювання, адекватність моделі та її практичне застосування.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість видів продукції, неперервною —час, площа посіву тощо, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, норма витрати сировини на одиницю продукції, випадковою — величина прибутку, кількість телят, які народяться у плановому періоді тощо.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані $x_j (j= 1, 2, ..., n)$, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні y_r $(r = I\ 2, ...,s)$, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь

досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай z— вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною z, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$z=f(x_1,x_2,...x_n;y_1,y_2,...y_s;c_1,c_2,...,c_l), \qquad (1)$$

де параметри c_k $(k=1,2,...,l)$ є кількісними характеристиками системи.

Функцію z називають *цільовою функцією,* або *функцією мети.* Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення z відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$max(min)z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ y_1,y_2,\ldots,y_s;c_1,c_2,\ldots,c_1\ ). \quad (2)$$

Можливості вибору x_j , завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$\varphi_i(x_1,x_2,...x_n;y_1,y_2,...y_s;c_1,c_2,...,c_l)\{\leq,=,\geq\}0, \qquad (3)$$

де $i=1,2,...,m$.

Тут набір символів (≤,=,≥) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу ≥ , для інших — рівності (=), а для решти — нерівності типу ≤ .

Система (3) називається *системою обмежень,* або *системою умов* задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j\geq 0 \quad (j = 1,2,...,n). \qquad (4)$$

Залежності (2)—(4) утворюють *економіко-математичну модель* економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

1.Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2.У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3.Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4.Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень.

Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (3), (4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \ldots x_n$ що задовольняє умови (3) і (4), називають *допустимим планом,* або *планом.* Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною *стратегією економічної системи, програмою дій.* Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (3) і (4), тобто множина всіх допустимих планів утворює *область існування планів* (*область допустимих планів*).

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним.* Оптимальний план *є розв'язком задачі математичного програмування* (2)—(4).

4. У математичному програмуванні виділяють два напрямки — *детерміновані* задачі і *стохастичні.* Детерміновані задачі не містять випадкових

змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі прибутки, врожайності сільськогосподарських культур тощо задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж ці величини задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням *a* і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У іншому разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається *стохастичним програмуванням.*

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи.

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути ***статичними*** (однокроковими) або ***динамічними*** (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (явища, процесу) у часі. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку економіки України до 2012 року, то мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2012 рік, а й на всі проміжні роки, тобто слід планувати поступовість (динаміку) розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають *стратегічним.* У ньому має бути обґрунтована оптимальна (найкраща, але реальна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників фактичні показники щороку можуть відхилятися від запланованих. Тому постає необхідність коригувати кожний річний план. Такі плани називають ***тактичними.*** Вони визначаються в результаті розв'язання статичної економіко-математичної задачі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, багатовимірністю задачі й означає, що послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних, причому отриманий на кожному кроці розв'язок має задово-

льняти умови оптимальності попереднього розв'язку. Така процедура може бути більш чи менш тісно пов'язана з часом. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються водночас на останній ітерації (останньому кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто у певний спосіб дістають допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій визначають оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не можна інтерпретувати як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язання. Якщо задачу можна розв'язувати як однокрокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, бо в такому разі для знаходження оптимального плану необхідно застосовувати складніші методи. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, які доводиться приймати з метою спрямування розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначена стратегічним планом.

Задачі математичного програмування поділяють також на ***дискретні*** і ***неперервні.*** Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З-поміж них окремий тип становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень. їх називають задачами *цілочислового програмування.* Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є *неперервною.*

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на *лінійні* та *нелінійні.* Якщо цільова функція (2) та обмеження (3) є лінійними, тобто містять змінні x_i тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих типів є статичні, детерміновані, неперервні та лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається *симплексним методом.* Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язання, які є ефективнішими. Наприклад, тра-

нспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що неточно описують процес, який досліджується, тому доводиться будувати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв'язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв'язання. Для окремих типів нелінійних задач розроблено спеціальні числові методи розв'язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле та квадратичне програмування. *Задача належить до опуклого програмування* у тому разі, коли цільова функція *вгнута,* якщо вона мінімізується, та *опукла,* якщо вона максимізується, а всі обмеження — однотипні нерівності типу (≤) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини — сталими величинами. У разі обмежень типу (≥) їх ліві частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. *Квадратичне програмування* — якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Щойно було розглянуто лише основні типи задач математичного програмування. Можна також за різними ознаками виокремити й інші підтипи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають *дробово-лінійне програмування,* коли обмеження є лінійними, а цільова функція — дробово-лінійна. Особливий тип становлять задачі *теорії ігор,* які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають частково або повністю протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підтипи. Наприклад, *ігри двох осіб із нульовою сумою.*

Наведена вище класифікація задач використана для структурування курсу «Математичне програмування».

Приклади економічних задач математичного програмування

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об'єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з'ясування найважливіших функ-

ціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між їхніми елементами. В результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень уможливлює формалізацію будь-якої економічної ситуації.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному разі вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає Ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л. В. Канторовича, в математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях(задана асортиментність).Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необ-

хідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин. Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів. Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

В основу моделей лінійного програмування закладені два прості допущення, які майже завжди виконуються:

- припущення подільності, яке полягає в тому, що сумарна кількість ресурсів, що використовуються і відповідний прибуток строго пропорційні обсягу випущеної продукції;
- припущення аддитивності полягає у рівності загальної суми всіх затрачених ресурсів кількості ресурсів, спожитих в технологічних процесах та рівності загального прибутку всім прибуткам, отриманим в процесах.

Питання про постановку задачі лінійного програмування розглянемо на прикладі.

Задача. Вибрати найдешевший режим харчування, що забезпечує наявність всіх необхідних поживних речовин.

Розв'язування. Вважатимемо, що є три види продуктів: B_1, B_2, B_3 і необхідна кількість поживних речовин позначена A_1, A_2, A_3, A_4. Позначимо α_{ij} — кількість поживних речовин вигляду Ai в продукті виду Bj, β_i — мінімальна добова потреба в речовині; c_i — ціна одиниці їжі. Дані запишемо в таблицю

Загальна кількість спожитих речовин не повинна бути меншою ніж мінімальна добова потреба в цій речовині.

Види поживних речовин	Види продуктів			Мінімальна потреба в речовині на добу
	B_1	B_2	B_3	
A_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_1
A_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_2
A_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β_3
A_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	β_4
Вартість одиниці продукту	c_1	c_2	c_3	

Враховуючи обмеження, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \geq \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \geq \beta_2, \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \geq \beta_3, \\ \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 \geq \beta_4. \end{cases} \quad (1)$$

Вартість всієї їжі позначимо z і вона повинна бути мінімальною, тобто

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \,(\min) \quad (2)$$

Так як від'ємна кількість їжі не має логічного змісту, то $x_i \geq 0$.

До такого класу відносяться всі задачі з подібними системами обмежень та аналогічним виглядом цільової функції, що оптимізується на максимум чи мінімум.

Математично такі задачі формулюються так: *серед невід'ємних розв'язків системи нерівностей (1) знайти такий, який надає функції (2) найменшого значення.*

4. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ — так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \ (max) \quad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m. \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \quad (3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють умови (2) і (3), і цільова функція (1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Для довільної задачі математичного програмування були введені поняття допустимого та оптимального планів.

Для загальної задачі лінійного програмування використовуються такі поняття.

Вектор $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ координати якого задовольняють систему обмежень (2) та умови невід'ємності змінних (3), називається *допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

Допустимий план $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *опорним планом* задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (2) у вигляді рівностей, а також обмеження (3) щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *невиродженим,* якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він *вироджений.*

Опорний план $X^* =(x^*_1,x^*_2,...,x^*_n)$, за якого цільова функція (1) досягає максимального (чи мінімального) значення, називається *оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

5. Стандартні форми ЗЛП.

Для розв'язування задач лінійного програмування та складання для них програм на ЕОМ необхідно, щоб задача була записана в певній стандартній формі. Розрізняємо два типи таких форм:

1) основна задача лінійного програмування з обмеженнями – рівностями (ОЗЛП з ОР або перша стандартна форма);

2) основна задача лінійного програмування з обмеженнями – нерівностями (ОЗЛП з ОН або друга стандартна форма).

ОЗЛП з ОР полягає в наступному: серед усіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

знайти такий, при якому форма

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (\text{extr}) \qquad (2)$$

набуває екстримального (максимального чи мінімального) значення.

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. Будь – яку задачу ЛП можна звести до ОЗЛП з ОР.

Приймемо це твердження без доведення. Зауважимо лише, як це потрібно зробити: спочатку до менших частин всіх обмежень – нерівностей потрібно додати нову невід'ємну невідому, яка перетворить її в рівність. ОЗЛП з ОН полягає в тому, що серед усіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n < b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n < b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n < b_m \end{cases} \tag{3}$$

знайти такий, при якому форма

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (\ extr) \tag{4}$$

набуває екстримального значення.

Справедливе наступне твердження.

Лема 2. ОЗЛП з ОР завжди може бути зведена до ОЗЛП з ОН.

І звідси випливає така теорема

Теорема 1. ОЗЛП з ОР і ОЗЛП з ОН еквівалентні між собою.

Тобто, кожному розв'язку $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ відповідає єдиний розв'язок $X_{роз}^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n, x^*_{n+1})$ рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b$, який одночасно є розв'язком нерівності, і, навпаки, кожному розв'язку рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b$ $X_{роз}^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n, x^*_{n+1})$ і нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ відповідає єдиний розв'язок $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності.

Щоб звести задачу до другої стандартної форми, необхідно методом Жордана-Гаусса виділити базисні невідомі та використавши невід'ємність невідомих звести до нерівностей обмеження ЗЛП.

<u>Приклад</u>. Звести до ОЗЛП з ОН задачу

$$z = 2 - x_1 + 3x_2 \qquad (\min),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (\mathrm{j} = 1,2,3,4)$$

<u>Розв'язування</u>. Виписуємо матрицю системи обмежень

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

і шукаємо ранг матриці, базисним буде мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Отже, ранг матриці рівний 2, x_1, x_4 — вільні невідомі, x_2, x_3 — базисні. Розв'язавши систему відносно базисних невідомих, маємо

$$\begin{cases} x_2 = 9 - 3x_1 + x_4, \\ x_3 = 1 + x_1 + 2x_4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (\mathrm{j} = 1,2,3,4).$$

Так як $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, то з останньої системи маємо:

$$\begin{cases} 9 - 3x_1 + x_4 \geq 0, \\ 1 + x_1 + 2x_4 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_4 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_4 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \qquad x_1 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Запишемо форму через вільні невідомі

$$z = 2 - x_1 + 3(9 - 3x_1 + x_4) = 29 - 10x_1 + 3x_4.$$

Таким чином, ОЗЛП з ОН рівносильна до даної має вигляд:

$$z = 29 - 10x_1 + 3x_4$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_4 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Зауважимо, що ОЗЛП з ОН рівносильна до ОЗЛП з ОР може мати різні вигляди, все залежить від того, які ми невідомі оголосимо базисними, а які вільними.

Лекція №2
Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

План

1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування.
2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

1. Для кращого розуміння алгебраїчних властивостей задач лінійного програмування скористаємось їх геометричною інтерпритацією. Введемо поняття опуклої множини.

Означення 1. *Множина точок М називається* ***опуклою****, якщо разом з будь – яким двома її точками множині належить і відрізок, що їх сполучає.*

Означення 2. *Множина називається* ***обмеженою****, якщо її можна помістити в кулю (коло) скінченого радіуса з центром в будь – якій точці множини, і* ***необмеженою*** *в протилежному випадку.*

Означення 3. ***Граничною*** називається така точка множини, в довільному околі якої є і точки, що належать множин, і точки, що їй не належать.

Означення 4. *Сукупність граничних точок множини називається її* ***границею***.

Найпростіший приклад опуклої множини – опуклий многокутник. Його границя складається з відрізків чи прямих. Точки, в яких перетинаються відрізки чи прямі границі многокутника називаються його ***вершинами.***

Означення 5. Перетином *областей називають множину точок, що належать кожній з цих областей.*

Теорема 2. Перетин будь – якого числа опуклих областей завжди є опукла множина.

Для геометричної інтерпритації будемо розглядати ОЗЛП з ОН, які містять лише дві невідомі, оскільки вони легко відображаються на прямокутній декартовій системі координат. Задачі з трьома невідомими на малюнку розглядатимуться в проекції, що утруднить їх розгляд, а задачі з більшою кількістю невідомих взагалі важко уявити геометрично.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (\text{extr}) \tag{6}$$

Лема 3. Розв'язком нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$ ***є півплощина.***

Означення 6. *Півплощину, побудовану за нерівністю* $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$ *називають* ***півплощиною розв'язків нерівності****, її границю –* ***граничною прямою*** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

Означення 7. *Сукупність точок, яка задовольняє систему нерівностей (5), називають* ***многокутником розв'язків (або областю допустимих значень—ОДЗ)****.*

Теорема 3. Многокутник розв'язків завжди є опуклою фігурою.

Теорема 4. Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається у вершині многокутника розв'язків.

Таким чином задачу лінійного програмування можна інтерпретувати так: у многокутнику розв'язків знайти таку вершину, де цільова функція набуває найменшого (найбільшого) значення.

2. На основі геометричної інтерпретації сформуємо алгоритм графічного методу відшукання оптимальних значень функції.

1) **Будуємо многокутник розв'язків**. Він складається з перетину окремих півплощин розв'язків системи (5). В силу обмежень $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ многокутник розв'язків завжди міститься в першому квадранті.

2) **Знаходимо оптимальну точку**. Вона міститься в вершині многокутника розв'язків. Для її відшукання відкладають *вектор нормалі* прямої $c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, $\vec{N}(c_1, c_2)$. Потім рисуємо лінію перпендикулярну до вектора нормалі, вона називається *лінією рівня*. Пересуваючи лінію рівня в напрямі вектора нормалі до останньої вершини многокутника розв'язків, отримуємо точку максимуму цільової функції, пересуваючи цю лінію в протилежному до вектора нормалі напрямі, в останній вершині дотику отримуємо точку мінімуму цільової функції.

3) **Обчислюємо оптимальні значення**. Знаходимо координати вершин max і min, як розв'язок системи рівнянь, що визначають сторони многокутника, що утворюють ці вершини. Знайдені координати підставляємо в форму (6).

Зауважимо, що якщо многокутник розв'язків необмежений, то можливо, що мінімального чи максимального (або й обох) значень не існує, тобто — це $+\infty$ чи $-\infty$.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x_1 + 3x_2$, за умов обмеження $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Розв'язування. Побудуємо прямі, що відповідають рівнянням, зрозумілим з системи обмежень та відмітимо ті півплощини, що відповідають нерівностям обмежень.

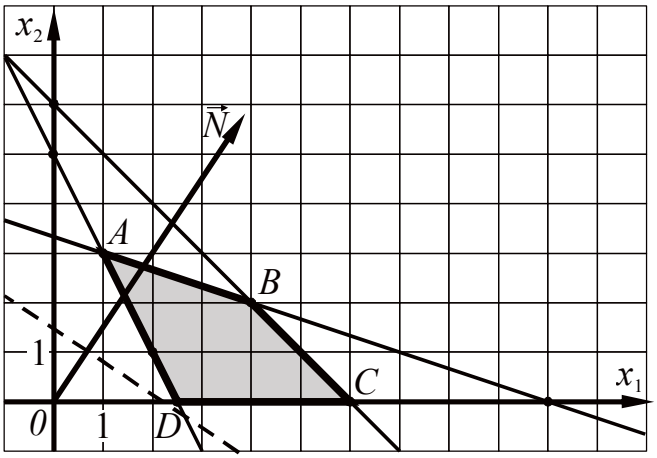
$l_1 : x_1 + 3x_2 = 10$, пряма проходить через точки (1; 3) і (10; 0);

$l_2 : x_1 + x_2 = 6$, пряма проходить через точки (0; 6) і (6; 0);

$l_3 : 2x_1 + x_2 = 5$, пряма проходить через точки (0; 5) і (2; 1).

Умова $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ вказує на достатність розгляду в першому квадранті.

Всім умовам належності до відповідних півплощин відповідає чотирикутник *ABCD*. Будуємо вектор нормалі $\vec{N}(2;3)$ до цільової функції і переміщаємо пряму перпендикулярно до цього вектора. Перший раз ця пряма перетинає трикутник в вершині *D*(2,5; 0), отже $z_{\min} = 2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 0 = 5$. Остання вершина дотикається до прямої вздовж її руху – це точка *C*(6; 0), звідси $z_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12$.



Лекція №3.
Симплексний метод та його застосування

План

1. Поняття про симплексний метод та канонічну форму ОЗЛП з ОР.
2. Основні характеристики симплексного - методу.
3. Робота з симплекс - таблицями.

1. Симплексний метод – один з основних методів розв'язування задач лінійного програмування. Розглянемо його ідею на конкретному прикладі задачі про використання ресурсів з двома видами ресурсів та двома видами продукції.

Означення 1. *Невід'ємний базисний розв'язок (план) будемо називати* ***опорним.***

Приклад 1. Знайти найбільше значення функції

$$z = 12 + x_1 + 2x_2$$

при таких обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4). \end{cases}$$

Розв'язування. Очевидно, що тут x_3, x_4 — базисні невідомі, а x_1, x_2 — вільні. Візьмемо початковий опорний план так: $x_1 = x_2 = 0$ (вільні невідомі нульові), тоді $x_3 = 12, x_4 = 16$.

$$x^{(1)} = (0,0,12,16), \quad z\left(x^{(1)}\right) = 12.$$

Такий розв'язок відповідає ситуації, коли продукція не виробляється. Будемо збільшувати ту з вільних невідомих, яка має додатній коефіцієнт у цільовій функції (причому, більший), тому що значення цільової функції при цьому зростатиме. Це означає, що при випуску продукції прибуток збільшуватиметься. Тобто збільшуватимемо x_2.

Нехай $x_1 = 0$. Система набуває вигляду

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 2,3,4). \end{cases}$$

Щоб x_3, x_4 були додатними, то в першому рівнянні x_2 можна надати найбільшого значення $\frac{12}{3}=4$, а в другому рівнянні $\frac{16}{2}=8$. Ясно, що x_2 не повинно бути більше 4, бо, інакше, в другому рівнянні x_3 буде від'ємною. x_2 вибираємо як найменшу частку від ділення вільних членів на відповідні коефіцієнти при x_2.

Нехай тепер $x_2=4$, тоді $x_3=0, x_4=8$. Ми дістали другий опорний план і відповідну йому цільову функцію

$$x^{(2)}=(0,4,0,8),\ z\left(x^{(2)}\right)=20.$$

Тепер базисними невідомими є x_2, x_4, а x_1, x_3 — вільні. Розв'язавши вихідну систему рівнянь відносно нового базису методом Жордана – Гаусса, отримаємо

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x_1+x_2+\frac{1}{3}x_3=4,\\ -\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_3+x_4=8;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=4-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3,\\ x_4=8+\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_3.\end{cases}$$

Запишемо цільову функцію через нові вільні невідомі

$$z=12+x_1+2\left(4-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3\right)=20-\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_3.$$

Видно, що при збільшенні вільних невідомих значення цільової функції буде спадати, тому знайдений розв'язок вважатимемо оптимальним.

Отже, **ідея методу** полягає в тому, щоб переходити від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб цільова функція оптимізовувалась (зростала чи спадала в залежності від умови задачі). Змінні які переходять з базисних у вільні повинні зберігати умову невід'ємності і на кожному кроці можна міняти місцями лише одну базисну невідому з однією вільною.

Ми бачили, що кожному опорному плану відповідає певним чином записана ОЗЛП з ОР. Форма її запису має деякі закономірності

1. Система рівнянь записана так, що кожна базисна невідома входить лише до одного рівняння системи, з коефіцієнтом, що дорівнює одиниця. Якщо рівняння розмістити так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то матриця базисних невідомих буде одиничною.
2. Вільні члени системи обмежень – невід'ємні

3. Оптимізуюча форма залежить лише від вільних невідомих.

Означення 2. *ОЗЛП з ОР, яка задовольняє умови* (*1*) – (*3*) *називають* ***канонічною формою.***

Означення 3. *Систему обмежень, що задовольняє умови* (*1*) – (*2*) *називають* ***канонічною системою обмежень.***

Якщо система обмежень – канонічна, а форма залежить ще від базисних невідомих, то ЗЛП називається майже канонічною.

2. При розв'язуванні задач на практиці будемо застосовувати метод ітерації, коли при виборі кожного опорного плану, починаючи з першого, за допомогою деяких правил визначають, чи знайдено розв'язок задачі, чи треба переходити до наступного опорного плану. Такий метод назвемо ***симплексним методом*** (чи ***симплекс-методом***).

Розглянемо основні властивості методу:

1. **Повнота**. Вказуємо чи правила роботи є однозначними, чи ні, як практично побудувати перший опорний план, чи буде останній побудований план точним розв'язком задачі.
2. **Область застосовності**. Вказуємо, для яких задач можна застосувати такий метод та визначити чи підпадає конкретна задача під дія методу. Якщо розв'язок існує, але останній опорний план його не дає, то треба вказати якої помилки припущено.
3. **Властивість збіжності**. Вказуємо, чи завжди алгоритм забезпечує збіжність, чи завжди збіжність приводить до правильного результату, скільки ітерацій треба зробити для отримання розв'язку, чи можна вважати план оптимальним, якщо проведення ітерацій було припинено на деякому кроці?
4. **Вимоги до обчислень**. З'ясовуємо наскільки складними та громіздкими є обчислення методу та при якій точності обчислень ми одержимо задовільні результати.

Зазначимо, що вперше симплексний метод застосував американський вчений Дж. Данціг в 1949 році, хоча сам алгоритм методу, крім правил вибору ключового елемента, був відомий ще у XIX столітті.

3. Зауважимо, що немає потреби при кожній ітерації виписувати формули переходу. Цей процес можна формалізувати, використовуючи спеціальні симплекс-таблиці. При роботі з ними не будемо розрізняти де обмеження, а де оптимізуюча функція, а перетворення проведемо методом Жордана – Гаусса, дещо модифікованим.

Критерій оптимальності за симплекс – таблицями: Якщо форма максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком, можливо, стовпця опорного плану), то опорний план є ***оптимальним.***

Коефіцієнти рядка 0 можна інтерпритувати як приріст функції z при збільшені вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним - якщо коефіцієнт додатний.

Запишемо ***алгоритм роботи з симплекс - таблицями:***

1. Зведемо задачу до канонічної форми.
2. Формально заповнюємо таблицю коефіцієнтами цільової функції (нульовий рядок) та коефіцієнтами рівнянь системи обмежень.
3. Перевіряємо задачу на оптимальність за критерієм.
4. Для вибору ***ключового стовпця*** знаходимо найбільший елемент в 0-рядку при дослідження цільової функції на максимум, чи найменший елемент при дослідженні її на максимум.
5. Для вибору ***ключового елемента*** складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика "опорний план") до відповідних додатних чисел ключового стовпчика і вибираємо серед них менше.
6. На перетині ключового рядка і ключового стовпця маємо ***ключовий елемент***.
7. Замість базисної невідомої ключового рядка вводимо нову базисну невідому - невідому ключового стовпчика.
8. Для заповнення ключового рядка ділимо всі відповідні елементи на ключовий елемент і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок для нової таблиці будемо називати ***ведучим.***
9. Всі інші рядки заповнюємо за методом Жордана-Гаусса

а) знаходимо рядок, який будемо заповнювати у попередній таблиці і позначаємо в ньому число колишнього ключового стовпчика;

б) множимо всі числа клітинок провідного рядка на число, протилежне до позначеного;

в) додаємо число рядка, що заповнюється, попередньої таблиці до чисел відповідних стовпчиків, утворених в п.б), і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці.

10. Перевіряємо новий опорний план на оптимальність. Якщо він не оптимальний, то повертаємось до пункту 4, якщо – оптимальний, то виписуємо отриманий розв'язок.

Розглянемо правила роботи із симплекс-таблицями на прикладі.

<u>Приклад 2</u>. Задачу лінійного програмування задано у вигляді таблиці

Види сировини	*Види продукції*		**Запаси сировини**
S_1	2	1	224
S_2	3	2	428
S_3	4	1	336
Прибуток	24	9	

Знайти оптимальний план виробництва.

Розв'язування. Позначимо x_1 – план випуску першого виду продукції, x_2- другої продукції. Складемо математичну модель отриманої задачі лінійного програмування.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 224, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 428, \\ 4x_1 + x_2 \le 336; \end{cases} \qquad z = 24x_1 + 9x_2 (\max)$$

Зведемо її до стандартної форми ввівши додаткові базисні невідомі x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 224, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 428, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 336; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5. \qquad z - 24x_1 - 9x_2 = 0(\max)$$

Складемо симплекс – таблицю та проведемо всі необхідні перетворення за алгоритмом, описаним вище.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	z	0	-24↓	-9	0	0	0
	1	x_3	224	2	3	3	0	0
	2	x_4	428	3	2	0	1	0
	3	$x_5 \rightarrow$	336	(4)	1	0	0	1
II	0	z	2016	0	-3↓	0	0	6
	1	$x_3 \rightarrow$	56	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
	2	x_4	176	0	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$
	3	x_1	84	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
III	0	z	2352	0	0	6	0	3
	1	x_2	112	0	1	2	0	-1
	2	x_4	36	0	0	-2,5	1	0,5
	3	x_1	56	1	0	-0,5	0	0,5

Зауваження. Базисні стовпчики заповнюються формально і поки що для аналізу задачі не використовуються. Тому можна заповнювати таблиці і без стовпчиків базисних невідомих. Такі таблиці називають *редукованим*.

З останньої таблиці виписуємо оптимальний план

$$x_{опт} = (56,112,0,36,0), \quad z_{\max} = 2352.$$

З економічної точки зору це означає, що оптимального плану ми досягнемо при випуску 56 одиниць першої продукції і 112 одиниць другої продукції.

Лекція №4.
Двоїстість в лінійному програмуванні

План

1. Поняття про взаємно двоїсті задачі.
2. Загальні правила складання двоїстих задач.
3. Зв'язок між оптимальними розв'язками двоїстих задач.

1. Використовуючи коефіцієнти задачі лінійного програмування можна скласти ще одну задачу лінійного програмування, яка називається двоїстою до заданої.

Означення 1. *Дві задачі лінійного програмування називаються* ***взаємно двоїстими,*** *якщо виконуються такі умови:*

1) матриці системи обмежень обох задач є транспонованими, одна відносно другої;

2) система обмежень складається з нерівностей, які в обох задачах напрямлені у протилежні боки;

3) коефіцієнти оптимізуючої форми однієї задачі є вільними членами системи обмежень другої і навпаки;

4) форми в обох задачах оптимізуються протилежно (одна на максимум, друга – на мінімум).

В загальному випадку приладами взаємно двоїстих задач є задачі *M* та *m*. Задача *M*:

$$z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k \qquad (\max) \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k \le b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\vdots\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sk}x_k \le b_s, \\ x_j \ge 0, (j = 1,2,\ldots,k). \end{cases} \tag{2}$$

Задача *m*:

$$z^* = b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_s y_s \qquad (\min) \tag{3}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{s1}y_s \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{s2}y_s \geq c_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1k}y_1 + a_{2k}y_2 + ... + a_{sk}y_s \geq c_k, \\ y_j \geq 0, (j = 1,2,...,s). \end{cases} \tag{4}$$

Умови означення виконуються автоматично. Наприклад, очевидно, що матриця системи обмежень першої задачі є транспонованою до матриці системи обмежень другої задачі.

Першу з цих ЗЛП називають вихідною задачею, другу – двоїстою до вихідної. Зауважимо, що двоїстою задачею до двоїстої буде знов вихідна задача.

Економічну суть двоїстих задач можна пояснити на прикладі задачі про ресурси. Вихідною буде задача: *організувати випуск продукції так, щоб використовуючи наявні ресурси отримати найбільший (максимальний) прибуток.* Двоїстою до неї: *якою має бути ціна кожного ресурсу, щоб при заданих запасах та прибутках від одиниці продукції загальні витрати були найменшими (мінімальними).*

2. Зрозуміло, що для кожної задачі лінійного програмування можна побудувати двоїсту, бо ЗЛП завжди зводиться до другої стандартної форми (ЗЛП з ОН). Сформулюємо **правила побудови двоїстої задачі**:

Перевірка умов:

1) в усіх обмеженнях вільні члени містяться справа, елементи з невідомими – зліва;

2) всі обмеження нерівності вихідної задачі записані так, що знаки спрямовані в один бік (якщо це не так, то потрібно перемножити обмеження на -1);

3) загальний знак нерівностей пов’язаний з оптимізацією форми наступним чином:

$$"\leq" \Rightarrow \max, \quad "\geq" \Rightarrow \min.$$

Побудова двоїстої задачі:

1) Кожному обмеженню вихідної задачі відповідає невідома y_i у двоїстій задачі, причому двоїста невідома, що відповідає обмеженню нерівності, має бути невід’ємною, а рівності - довільного знаку.

2) Кожній невідомій x_j двоїстої задачі відповідає обмеження двоїстої. Будуються ці обмеження так: перемножуються коефіцієнти a_{ij}, що стоять

при x_j на відповідні двоїсті невідомі y_i. Результати множення підсумовуються і розміщуються в лівій частині обмеження, а в правій – коефіцієнт c_{ij}, при x_j в оптимізуючій формі.

3) В усіх обмеженнях двоїстої задачі ставимо один і той самий знак нерівності, протилежний до загального знака нерівності системи обмежень вихідної задачі.

4) Форму двоїстої задачі оптимізуємо протилежно до форми вихідної задачі.

5) Коефіцієнти при двоїстих невідомих у формі є вільними членами системи обмежень вихідної задачі. Вільний член c_0 форми вихідної задачі переноситься у форму двоїстої задачі без змін.

Приклад. Побудувати двоїсту задачу до заданої ЗЛП:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2, \\ -3y_1 + y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_j \geq 0. \end{cases}$$

$$z = -10y_1 + 4y_2 + 5y_3 \qquad (\max)$$

Розв'язування. Замінимо знак в першій нерівності для зведення до стандартного вигляду, для цього домножимо його на (-1)

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ -3y_1 + y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_j \geq 0. \end{cases}$$

Обмеженням ставимо у відповідність двоїсті невідомі x_1, x_2 і будуємо двоїсту задачу:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 \geq -10, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \quad (\min).$$

Зауваження. *Якщо система обмежень має обмеження рівності, то двоїста задача до побудованої двоїстої вже не буде такою як вихідна.*

3. Зв'язок вихідної і двоїстої задач обумовлений тим, що розв'язок одної з них можна добути безпосередньо з розв'язку другої. Для цього використовуємо такі важливі твердження.

Теорема 1. Якщо у двоїстих задачах одна з них має розв'язок, то буде існувати розв'язок і для другої задачі, а оптимальні значення при цьому збігаються, тобто $z_{\max} = z^*_{\min}$**.**

Теорема 2. Для того, щоб x^* **і** y^* **були оптимальними розв'язками задач M і m відповідно, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:**

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0; \qquad y_i^*\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0.$$

З теореми 2 випливає, що коли обмеження задачі на оптимальному розв'язку не перетворюються на точну рівність, то відповідна невідома оптимального розв'язку обов'язково дорівнює нулю.

Ці теореми дають змогу за розв'язком одної задачі зразу знайти розв'язок другої, двоїстої до неї. Розглянемо приклад з попереднього питання. Якщо в першому обмежені шляхом множення на (-1) поміняти знаки на протилежні, то отримаємо задачу лінійного програмування, що досліджувалась графічним методом в Лекції №1. Там же ми показали, що $z_{\min} = 8$ в точці (4; 0). Отже, $z^*_{\max} = 8$ для вихідної задачі. При підстановці координат в рівності системи обмежень, бачимо, що тільки друге перетворюється в нуль, тому $y_1 = y_3 = 0$. y_2 знаходимо з рівності

$$8 = 4y_2;\ y_2 = 2.$$

Отже, розв'язок вихідної задачі (0; 2; 0).

Лекція №5.
Метод штучного базису

План

1. Поняття про метод штучного базису.
2. Двоїстий симплексний метод.

1. Вибір початкової канонічної форми дає змогу формалізувати відшукання оптимального розв'язку за симплекс-таблицями. Канонічна форма задачі легко будується, коли система обмежень виглядає так, як це було в задачі про використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad b_i \ge 0, \quad (i = 1,2,...,m).$$

При такому типі обмежень введені додаткові невідомі надавали системі обмежень (а з нею і ОЗЛП з ОР) канонічної форми. З іншого боку, така структура обмежень не охоплює всіх можливих випадків, що трапляються в лінійних оптимізаційних моделях. Крім того, є такі задачі, які взагалі не мають жодного допустимого плану. Наприклад, задача

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 3, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,...,4), \end{cases}$$
$$(\max) z = 2x_1 + x_2$$

має базисні розв'язки

$$x^{(1)} = (0,0,2,-3),\ x^{(2)} = (2,0,0,-1),\ x^{(3)} = (9/4,-1/4,0,0),$$
$$x^{(4)} = (0,-1,3,0),\ x^{(5)} = (3,0,-1,0),\ x^{(6)} = (0,2,0,-9),$$

кожен з яких не є опорним. Очевидно, що вона не має розв'язку. Тому розглянемо деякі методи, які дають змогу з'ясувати, чи має система обмежень допустимі плани чи ні, і вказують шляхи їх пошуку.

Нехай ОЗЛП з ОР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ \vdots \qquad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ \mathrm{a}_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_{m,} \\ x_1,...,x_n \ge 0, \end{cases}$$
$$(\max) z = c_0 + c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

записана так, що всі вільні члени $b_i \ge 0 (i = 1,2,...,n)$. Цього завжди можна досягти, помноживши, якщо це треба, рівняння з від'ємним вільним членом на -1.

Щоб дістати одиничну матрицю при базисних невідомих, формально до лівої частини кожного рівняння додаємо по одній невідомій $w_i \geq 0 (i = 1,2,...,m)$, які будемо називати штучними. В результаті система обмежень набуває вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + w_1 = b_1, \\ \vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n + w_m = b_m, \\ x_1,...,x_n \geq 0, w_1,...,w_m \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

До неї додаємо штучну форму

$$(\min) f = w_1 + ... + w_m. \tag{2}$$

Задача (1), (2) є задачею лінійного програмування, яка записана у майже канонічній формі відносно базисних невідомих $w_1,...,w_m$. Залишається у формі (2) із системи обмежень (1) записати $w_i (i = 1,...,m)$ через вільні невідомі $x_1,...,x_n$.

Означення 1. *Систему обмежень будемо називати* ***сумісною*** *в області невід'ємних значень, якщо вона має хоча б один допустимий розв'язок.*

Справедливим є такий критерій сумісності системи обмежень в області невід'ємних значень.

Теорема 1. Для того щоб система обмежень була сумісною в області невід'ємних значень, необхідно і достатньо, щоб на розв'язках (1)

$$f_{\min} = 0.$$

З теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо оптимальний план задачі (1)-(2) містить хоча б одну штучну невідому* w_i*, то вихідна задача не має розв'язку, оскільки вона не є сумісною в області невід'ємних значень.*

Теорема 1 дає практично крім факту існування допустимого плану і метод його відшукання. Зазвичай, знайдений допустимий план є завжди опорним. На прикладі розглянемо методику пошуку опорного плану за методом штучного базису.

<u>Приклад 1</u>. Знайти розв'язок задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ x_1,...,x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Вводимо штучні невідомі w_1 *і* w_2

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + w_1 = 18, \\ 3x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + w_2 = 16, \\ x_1, ..., x_4, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

штучну форму

$$f = w_1 + w_2 = 34 - (7x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

і заповнюємо початкову таблицю

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	34	7	-1	3	4
	1	w_3	18	4	-2	1	3
	2	w	16	3	1	2	1
	3	z	0	-2	1	-3	1

Зробимо декілька зауважень:

Зауваження 1. Щоб знайти опорний план, треба перевести штучні невідомі з базисних у вільні. З цією метою у методі штучного базису використовуємо редуковані таблиці, оскільки після переходу у вільні штучні невідомі нас вже не буде цікавити.

Зауваження 2. Нульовий рядок (рядок оцінок) заповнюємо за штучною формою. Його можна дістати формальним додаванням чисел відповідних стовпчиків системи обмежень.

Зауваження 3. Для того щоб у кінцевому підсумку основна оптимізуюча форма також була виражена через вільні невідомі, ми їй відводимо останній рядок у таблиці і виконуємо з ним ці самі перетворення, що і з іншими рядками.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	34	7	-1	2	4
	1	w_1	18	(4)	-2	1	3
	2	w_2	16	3	1	2	1
	3	z	0	-2	1	-3	1

II	0	f	5/2	0	5/2	5/4	-5/4
	1	x_1	9/2	1	-1/2	1/4	3/4
	2	w_2	5/2	0	(5/2)	5/4	-5/4
	3	z	9	0	0	-5/2	5/2
III	0	f	0	0	0	0	0
	1	x_1	5	1	0	1/2	½
	2	x_2	1	0	1	1/2	-1/2
	3	z	9	0	0	-5/2	5/2

У нульовому рядку другої ітерації немає вже додатних чисел, тому план $X^* = (5,1,0,0,0,0)$ є оптимальним для задачі (3), а план X=(5,1,0,0) - опорним для вихідної задачі. Тепер розв'язуємо вихідну задачу. Виписуємо ще раз таблицю другої ітерації, де у нульовому рядку будуть елементи форми z (3-й рядок таблиці). Результати операції подані у новій таблиці.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	z	9	0	0	-5/2	5/2
	1	x_1	5	1	0	1/2	1/2
	2	x_2	1	0	1	(1/2)	-1/2
II	0	z	14	0	5	0	0
	1	x_1	4	1	-1	0	1
	2	x_3	2	0	2	1	-1

План $X^* = (4,0,2,0)$ є оптимальним, $z_{\max} = 14$.

Зауваження 4. Методом штучного базису можна окремо (без оптимізуючої форми) досліджувати систему обмежень на сумісність в області невід'ємних значень. Це доцільно робити в тих випадках, коли є деякі ознаки того, що система обмежень не може мати допустимих планів.

2. Розглянемо метод знаходження опорних планів, в якому використовується поняття двоїстості. Якщо формально заповнити за канонічною формою симплекс-таблиці, то видно, що стовпчики однієї стануть рядками двоїстої і навпаки. Тому немає потреби окремо розв'язувати вихідну задачу, а окремо - двоїсту, оскільки розв'язок обох можна знайти за одними й тими самими таблицями, пам'ятаючи, що невідомим однієї таблиці відповідають стовпчики, а невідомим другої - рядки.

Спочатку розглянемо, як можна використати поняття двоїстості для зведення вихідної задачі до канонічної форми, оскільки, маючи загальний розв'язок, завжди можна позбутися базисних невідомих у формі. Тому ми не

будемо звертати уваги на рядок оптимізуючої форми доти, доки не дістанемо опорного плану.

Отже, ми маємо базис задачі і в ньому деякі плани не від'ємні. Тоді ті базисні невідомі, що мають не від'ємні плани, мають бути виключені з базису.

Припустимо, що невідома x_k має від'ємний план $(\beta_k \le 0)$. Розглянемо *k*-й рядок. Якщо в ньому всі числа додатні (за винятком β_k), то двоїста задача, а разом з нею і вихідна, не мають розв'язку через необмеженість форми.

У іншому випадку виділяємо стовпчики, в яких числа *k*-го порядку від'ємні. У кожному з виділених стовпчиків складаємо відношення $\frac{\beta_e}{a_{ej}}$ за принципом: додатні до додатних, від'ємні до від'ємних, і з найменших відношень вибираємо ключові елементи. Позначимо найменші відношення стовпчиків через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots,$ а числа нульового рядка відповідних стовпчиків-через $\theta_1, \theta_2, \ldots$

Введемо до базисних вільну невідому, для якої (при максимізації форми)

$$\theta_s \Delta_s = \min_{1 \le i \le n} \{\theta_i \Delta_i\}. \qquad (4)$$

Такий вибір вільної невідомої можна пояснити тим, що в канонічній задачі в оптимізуючій формі маємо число $-\theta_i$. Чим більшим воно буде, тим більшим буде значення форми при зміні x_i.

Зауваження 5. При невеликій розмірності задачі формулою (4) можна нехтувати, за ключовий можна взяти будь-який стовпчик з від'ємним числом у *k*-му рядку . Число ітерації при цьому майже не змінюється.

<u>Приклад 2</u>. Розв'язати ЗЛП

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 5x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$(\max) z = 2x_1 + x_2.$$

<u>Розв'язування.</u>

1. Помножимо другу нерівність на (-1) і запишемо задачу у першій стандартній формі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 - 5x_2 + x_4 = -5, \\ x_1, \ldots, x_4 \ge 0, \end{cases}$$

$$(\max) z = 2x_1 + x_2.$$

2. Формально заповнюємо симплекс-таблицю і виділяємо рядок з найменшим (від'ємним) планом.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	z	0	2	$-1\downarrow$	0	0
	1	x_3	12	1	1	1	0
	2	$x_4\rightarrow$	-5	-1	$\boxed{-5}$	0	1

3. Вибираємо вільну невідому для переходу в базисні невідомі. Маємо два від'ємні числа: -1 у стовпчику x_1 і -5 у стовпчику x_2:

$$\Delta_1 = \min\left(\frac{12}{1}, \frac{-5}{-1}\right) = 5, \quad \theta_1 = 2,$$

$$\Delta_2 = \min\left(\frac{12}{1}, \frac{-5}{-5}\right) = 1, \quad \theta_2 = -1,$$

$$\min\{\Delta_i \theta_i\} = \min\{5\times 2; 1\times(-1)\} = -1.$$

Отже, базисною буде x_2 замість x_4 : -5 — ключовий елемент.

4. За правилами роботи із симплекс-таблицями маємо

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
II	0	z	1	$\frac{11}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$
	1	x_3	11	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$
	2	x_2	1	$\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$

Помічаємо, що план є опорним, тому розв'язуємо задачу за звичайним симплекс-методом.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	z	1	$\frac{11}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}\downarrow$
	1	$x_3\rightarrow$	11	$\frac{4}{5}$	0	1	$\boxed{(\frac{1}{5})}$
	2	x_2	1	$\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$

II	0	z	12	$\frac{1}{5}$	0	5	0
	1	x_4	55	4	0	5	1
	2	x_2	12	1	1	1	0

Оптимальний план випливає з останньої симплекс-таблиці:

$$x_{опт} = (0,12,0,55), z_{\max} = 12.$$

Вибір x_1 як ключового стовпчика збільшує процес на одну ітерацію.

Якби друга ітерація не давала опорного плану, то процес треба було б повторювати доти, доки не здобудемо опорного плану. Із алгоритму випливає, що цей метод доцільно застосовувати тоді, коли обмеження задачі містять нерівності різних знаків або вибраний базис не дає опорного плану.

При відшуканні опорних планів на числа оптимізуючої форми при виборі ключового елемента можна не звертати уваги. Цей факт дає змогу за одну ітерацію знайти опорний план задачі, в базисі якої всі плани є від'ємними. Досить вибрати ключовий елемент не з найменшого, а з найбільшого відношення і виконати звичайні симплекс перетворення.

Розв'язки вихідної та двоїстої задач можна виписати за однією і тією самою оптимальною таблицею. У найпростішому випадку, коли вихідна модель має другу стандартну форму $(Ax \le b)$, як це має місце в задачі про використання ресурсів, двоїстий оптимальний розв'язок виписуємо за нульовим рядком стовпчиків додаткових невідомих.

Лекція №6.
Математична модель транспортної задачі

План

1. Постановка транспортної задачі.
2. Методи побудови першого опорного плану транспортної задачі.
3. Транспортна задача з неправильним балансом.

1. Деякі задачі лінійного програмування, до яких зводяться практичні моделі управління та планування мають особливу структуру своїх систем обмежень і можуть розв'язуватись без складання загальної симплекс – таблиці. Специфіка їх полягає в тому, що в кожному рядку таблиці лише невелика кількість елементів буде відмінною від нуля чи інших фіксованих сталих.

Особлива форма системи обмежень підказує шляхи створення спеціальних методів розв'язування, для яких немає аналогів серед задач лінійного програмування. При цьому велику роль відіграє і фізичний (реальний) зміст таких задач. Щодо програмування таких задач, то відзначимо, що вони вимагають меншого об'єму оперативної пам'яті (меншою є необхідна кількість комірок) та виконуються із економією машинного часу.

Серед спеціальних задач на практиці найчастіше застосовується так звана ***транспортна задача*** та її різноманітні модифікації. Класична транспортна задача вимагає пошуку найбільш економного плану перевезень однорідного продукту (чи взаємозамінних продуктів) з пунктів виробництва чи зберігання (фабрики, станції, склади тощо) до пунктів споживання (магазини, кіоски призначення і т.д.). Ефективність його оцінюється за критерієм найменшої вартості перевезення. З економічної точки зору це може бути, наприклад, найменша кількість витраченого бензину.

Нехай на m пунктах відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$ зосереджено $a_1, ..., a_m$ одиниць деякого однорідного вантажу. Цей вантаж необхідно перевезти в n пунктів призначення $B_1, ..., B_n$, з потребами, відповідно, $b_1, ... ,b_n$ одиниць. Вартість перевезень з пункту A_i в пункт B_j вважається сталою і відомою, та позначається c_{ij}. Зрозуміло, що всі вартості перевезень зручно організувати в двовимірний масив.

Означення 1. *Транспортна задача для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах при-*

значення ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) *називається* ***транспортною задачею з правильним балансом*** *(або* ***закритою транспортною задачею****).*

Означення 2*. Транспортна задача для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення не дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах призначення (порушується умова* $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ *) називається* ***транспортною задачею з неправильним балансом*** *(або* ***відкритою транспортною задачею****).*

Всі дані транспортної задачі заносять в спеціальну таблицю, яка називається ***матрицею перевезень***:

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Оптимальний план перевезень наперед невідомий, тому позначимо кількість вантажу, яку потрібно перевезти з пункту A_i в пункт B_j величиною x_{ij}. Це можна оформити у вигляді іншої таблиці:

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Надалі, з метою економії часу та більшої наглядності, ми зводитемо ці таблиці в одну.

Складемо математичну модель з таких міркувань. Кількість вантажу, який потрібно перевезти до пункту B_j з усіх пунктів відправлення з одного

боку рівна $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, з іншого – b_j. Так як загальна сума запасів рівна загальній сумі потреб, то

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Аналогічно, з кожного пункту відправлення відвантажено таку кількість вантажу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Разом $m+n$ нерівностей систем (1) та (2) складають систему обмежень транспортної задачі.

Вартість перевезення вантажу з пункту A_i в пункт B_j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Щоб знайти загальну вартість перевезень потрібно просумувати вартості перевезень всіх клітинок. Таким чином випишемо цільову функцію транспортної задачі:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (min). \tag{3}$$

Математичною моделлю транспортної задачі є наступне твердження: *серед усіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь (1) – (2) знайти такий, при якому функція (3) набуває найменшого значення*.

2. Оскільки транспортна задача є здачею лінійного програмування, то її можна розв'язувати і симплекс – методом. Проте, через просту будову системи обмежень цей метод значно спрощується. Це видно вже при побудові першого опорного плану.

Діагональний метод полягає у послідовному заповненні клітинок матриці перевезень, починаючи з кутової, послідовно вичерпуючи запаси чи потреби. Усі клітинки заповнюються мінімальним числом, що є на перетині рядка запасів та стовпця потреб. Цей метод найбільш пристосований для програмування його з використанням персонального комп'ютера. Його ще називають *методом північно – західного кута*.

Метод найменшої вартості полягає в тому, що заповнення починаємо з клітинки, яка має найменшу вартість перевезення, в ній проставляємо мінімальне значення з перетину запасів та потреб. Після цього вибирається клітинка з найменшим значенням серед тих, що залишилися і так триває до повного заповнення. Якщо запаси чи потреби якогось пункту вже вичерпались,

то варто занулити ті клітинки, що ще залишились незаповненими в рядку (стовпці).

Метод осереднених коефіцієнтів полягає в обчислені середніх вартостей рядків та стовпців матриці перевезення за формулами:

$$c_{Ai} = \frac{c_{i1} + c_{i2} + ... + c_{in}}{n}; \qquad c_{Bi} = \frac{c_{1j} + c_{2j} + ... + c_{mj}}{m}.$$

Після цього обчислюємо усереднені коефіцієнти для кожної клітинки за формулами:

$$k_{ij} = c_{ij} - (c_{A_i} + c_{B_j}).$$

Потім заповнюємо послідовно клітинки з найменшими значеннями усереднених коефіцієнтів. Цей метод є найскладнішим при застосуванні, одначе отриманий опорний план найкращий серед перерахованих.

<u>Приклад 1.</u> Побудувати перший опорний план для транспортної задачі з матрицею вартості перевезень c_{ij}, вектором запасів a_i та вектором потреб b_j.

$$a_i = \begin{pmatrix} 310 & 280 & 250 \end{pmatrix}; b_j = \begin{pmatrix} 250 & 110 & 220 & 260 \end{pmatrix}; c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 13 \\ 12 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

<u>Розв'язування.</u> Безпосередньою перевіркою переконуємось, що це транспортна задача з правильним балансом.

1) Заповнимо таблицю діагональним методом:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 250	5 60	7 0	3 0	310
A_2	8 0	6 50	9 220	13 10	280
A_3	12 0	4 0	5 0	11 250	250
Потреби	250	110	220	260	

Перерахуємо значення опорного плану:

$$z = 4 \cdot 250 + 5 \cdot 60 + 6 \cdot 50 + 9 \cdot 220 + 13 \cdot 10 + 11 \cdot 250 = 6460.$$

2) Використовуючи метод найменшої вартості, отримаємо:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 50	5 0	7 0	3 260	310
A_2	8 200	6 0	9 80	13 0	280
A_3	12 0	4 110	5 140	11 0	250
Потреби	250	110	220	260	

Перерахуємо значення опорного плану:

$$z = 4 \cdot 50 + 3 \cdot 260 + 8 \cdot 200 + 9 \cdot 80 + 4 \cdot 110 + 5 \cdot 140 = 4440.$$

3) Для методу осереднених коефіцієнтів добудуємо в таблиці ще один стовпець та рядочок:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси	C_A
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	4 -8,75 0	5 -4,75 50	7 -4,75 0	3 -10,75 260	310	4,75
A_2	8 -9 250	6 -8 30	9 -7 0	13 -5 0	280	9
A_3	12 -4 0	4 -9 30	5 -10 220	11 -6 0	250	8
Потреби	250	110	220	260		
C_B	8	5	7	9		

Перерахуємо значення опорного плану:

$$z = 5 \cdot 50 + 3 \cdot 260 + 8 \cdot 250 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 30 + 5 \cdot 220 = 4430.$$

Порівнюючи опорні плани, знайдені різними методами, бачимо, що найкращим є опорний план, знайдений за методом осередкованих коефіцієнтів і він дорівнює 4430 умовних одиниць.

Для контролю правильності заповнення матриці перевезень зручно використовувати такі твердження.

Зауваження 1. Ранг матриці системи обмежень транспортної задачі визначається за формулою

$$r=m+n-1,$$

де m – число пунктів відправлення, n – число пунктів споживання.

Зауваження 2. Число базисних (заповнених) клітинок завжди дорівнює рангу матриці транспортної задачі. У протилежному випадку їх потрібно доповнити до відповідної кількості за рахунок вільних з базисним значенням нуль.

3. На практиці транспортні задачі, в яких загальна сума запасів співпадає з загальною сумою потреб зустрічаються дуже рідко. Набагато частіше, якась з цих сум більша (наприклад, явище дефіциту чи переповнення ринку товарів). Такі задачі називають задачами з неправильним балансом і розв'язують їх ***розподільчим методом.*** Тобто спочатку зводять цю задачу до задачі з правильним балансом, додаючи або фіктивний пункт призначення чи відправлення в залежності від дефіциту потреб чи запасів. *Вартості в фіктивних пунктах вважають рівними нулю, щоб не змінювалась загальна вартість перевезень.*

При побудові першого опорного плану у розрахунках ми фіктивні пункти не враховуємо, бо всі вартості в ньому найменші (нулі), але на загальну вартість перевезень вони не впливають. Проводимо заповнення в основній таблиці, а потім остачі вносимо в фіктивні клітинки.

Приклад 2. Побудувати перший опорний план для транспортної задачі з матрицею вартості перевезень c_{ij}, вектором запасів a_i та вектором потреб b_j

$$a_i = \begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix};\ b_j = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 45 & 15 \end{pmatrix}; c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язування. Загальні суми запасів *100* і потреб – *110* є різними тому потрібно для збалансування ввести фіктивний пункт постачання із запасами, що дорівнюють *110 – 100 =10* (одиниць) і нульовими вартостями.

Побудуємо матрицю перевезень, що містить і фіктивний пункт та заповнимо її методом найменшої вартості.

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3 0	4 30	6 30	7 0	60
A_2	2 20	5 0	8 5	1 15	40
A_3	0 0	0 0	0 10	0 0	10
Потреби	20	30	45	15	

При розрахунку значення опорного плану на рядок (в даному випадку) фіктивних клітинок можна взагалі не звертати уваги. Прорахуємо значення опорного плану:

$$z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 15 = 395\,(\text{од.})$$

Лекція №7.
Оптимальний план транспортної задачі

План

1. Критерій оптимальності опорного розв'язку ТЗ методом потенціалів.
2. Метод квадратів переходу між опорними планами транспортної задачі.
3. Перехід між опорними планами за циклом перерахунку.

1. Із прикладів, наведених в попередній лекції, видно, що перші опорні плани ТЗ, побудовані діагональним методом та методом найменшої вартості не є оптимальними. Що стосується методу осередкованих коефіцієнтів, то ніякого висновку про це ми зробити не можемо. Тим часом питання оптимальності плану має велике економічне значення.

Знайдемо критерій оптимальності транспортної задачі із співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Ввівши двоїсті змінні α_1, α_2, ..., α_m та β_1, β_2, ..., β_n, складемо двоїсту задачу до транспортної. Її система обмежень має вигляд

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij} \qquad (i = 1,...,m; j = 1,...n) \tag{1}$$

Нерівності (1) можна конкретизувати, враховуючи співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач:

А) Для базисних невідомих (клітинок):

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \tag{2}$$

Б) Для вільних невідомих (клітинок):

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}. \tag{3}$$

Такий метод називають ***методом потенціалів*** . При його використанні ми спочатку шукаємо такі потенціали α_i, β_j, які задовольнятимуть рівності (2) для всіх заповнених клітинок, а потім перевіримо, чи виконуються нерівності (3) для всіх незаповнених клітинок.

<u>Приклад 1</u>. Використаємо метод потенціалів для дослідження задачі з п.2 лекції №7.

Розглянемо опорний план, побудований діагональним методом:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	4 250	5 60	7 0	3 0	310	0
A_2	8 0	6 50	9 220	13 10	280	1
A_3	12 0	4 0	5 0	11 250	250	-1
Потреби	250	110	220	260		
β_j	4	5	8	12		

Використовуючи умови (2), отримаємо наступну систему рівнянь для знаходження потенціалів:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 4, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 6, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 9, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 13, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 11. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) містить 7 рівнянь із 8 невідомими. Ранг системи дорівнює 4+4-1=7, тому одну невідому α_1 оголошуємо вільною і прирівнюємо до нуля. Розв'язки системи відображені в таблиці.

Перевіримо виконання умов (3) для побудованого опорного плану:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 \le 7 - \textit{хибне}, \\ \alpha_1 + \beta_4 \le 3 - \textit{хибне}, \\ \alpha_2 + \beta_1 \le 8 - \textit{істине}, \\ \alpha_3 + \beta_1 \le 12 - \textit{істине}, \\ \alpha_3 + \beta_2 \le 4 - \textit{істине}, \\ \alpha_3 + \beta_3 \le 5 - \textit{хибне}. \end{cases} \tag{5}$$

Із умов (5) випливає, що план не є оптимальним.

Усі попередні твердження можна узагальнити у вигляді теореми.

Теорема 1. Для того, щоб опорний план транспортної задачі був оптимальним необхідно і досить, щоб коефіцієнти

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - \left(\alpha_i + \beta_j\right) \tag{6}$$

обчислені для вільних клітинок, де α_i, β_j - розв'язки системи (2), були невід'ємними.

Зауваження 1. Для обчислення потенціалів не обов'язково складати систему рівнянь, їх можна знайти за таким правилом*: невідомий потенціал дорівнює різниці вартості базисної клітинки і значення відомого потенціалу.*

2. Опорний план, як правило, буває неоптимальним, тому необхідно вміти переходити від одного опорного плану до іншого так, щоб значення форми (цільової функції) постійно зменшувалось. Один з таких методів – ***метод квадратів***.

Означення 1*. Чотири клітинки, що розміщені в кутах виділеного прямокутника матриці перевезення, в яких хоча б на одній діагоналі розміщені базисні клітинки будемо називати* ***квадратом****.*

Дві інші клітинки можуть бути будь – які.

Означення 2. *Квадрат будемо називати* ***неправильним,*** *якщо сума вартостей базисних клітинок діагоналі більша за суму двох інших вартостей і* ***правильним,*** *якщо ця сума менша. Квадрат називаємо* ***нейтральним****, якщо обидві суми рівні між собою.*

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. В оптимальній матриці перевезень не існує неправильних квадратів.

Метод квадратів грунтується на поступовій заміні всіх неправильних квадратів – правильними. Зауважимо, що неправильний квадрат завжди має вершину в вільній клітинці для якої не виконується умова (3).

<u>Приклад 2.</u> У вищерозглянутій таблиці є неправильним квадрат A_1B_2 - A_1B_3 – A_2B_3 – A_2B_2.

5 60	7 0
6 50	9 220

У ньому сума вартостей базисних клітинок 5+9=14 більша за суму вартостей двох інших клітинок 7+6=13.

Перерахунок здійснюємо наступним чином:

- вибираємо на базисній діагоналі менше значення кількості перевезень (у нашому випадку це 60);
- віднімаємо це значення від елементів базисної діагоналі і додаємо до елементів іншої діагоналі:

5 60-60	7 0+60
6 50+60	9 220-60

Отримаємо

5 0	7 60
6 110	9 160

Переконаємось, що такі перетворення зменшують вартість перевезень. Дійсно попереднє значення Z=300+300+1980=2580 (у.о.), а перераховане – Z=420+660+1440=2520 (у.о.).

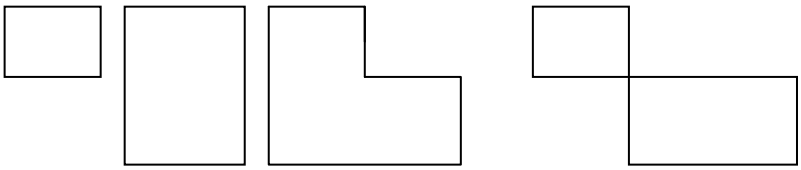
Для досягнення найкращого результату потрібно перерахувати всі неправильні квадрати. Коли в матриці перевезень вже не буде неправильних квадратів, то слід перевірити знайдений розв'язок за методом потенціалів на оптимальність.

Зауваження 2. Відсутність неправильних квадратів ще не гарантує оптимальності розв'язку.

3. Введемо в розгляд ще один метод знаходження оптимального плану транспортної задачі, який носить назву ***методу перерахунку за циклом.***

Означення 3. ***Циклом*** *в матриці будемо називати замкнену ламану лінію, вершини якої розміщені в клітинках матриці перевезень і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпцю.*

Можливі види циклів схематично зобразимо на малюнку.



Перпендикулярні ламані в циклі можуть перетинатись і точка їх перетину не буде вважатись вершиною циклу.

Означення 4. *Вершини одного і того самого відрізку циклу будемо називати* ***сусідніми***.

Означення 5. *Цикл, сусіднім вершинам якого поставлені у відповідність протилежні знаки ("+" і " - "), називають* ***означеним***.

Означення 6**. Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітинці, а всі інші у базисних, називають* ***циклом перерахунку.

У вільній клітинці завжди ставиться знак “+”.

***Означення 7. Зсувом** по циклу перерахунку на число θ називають таку операцію, при якій в додатній вершині додається одне і те саме число θ, а у від’ємних віднімається.*

Справедливими є наступні твердження.

Теорема 3. Зсув за означеним циклом в матриці перевезень перетворює один розв’язок системи обмежень транспортної задачі в інший розв’язок цієї самої задачі.

Теорема 4. Для будь – якої вільної клітинки існує лише один цикл перерахунку.

Приклад 3. Перерахувати опорний план транспортної задачі з відомим першим опорним планом за циклом перерахунку.

Пункти відправлення	Пункти споживання					За паси	α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		0
A_1	4 - 22	1 + 38	30	40	40	60	
A_2	20	3 - 7	2 20	2 + 8	30	35	2
A_3	3 + 0	5 0	2 0	4 - 10	4 30	40	4
Потреби	22	45	20	18	30		
β_j	4	1	0	0	0		

Розв’язування. Безпосередньою перевіркою за методом потенціалів переконуємось, що план не є оптимальним. Зокрема, вільна клітинка A_3B_1 не задовольняє умову (3). Тому потрібно здійснити перехід до іншого опорного плану.

Можливим циклом перерахунку є той, що зображений в таблиці. Виберемо у вершинах найменше базисне значення (це 7) і зробимо зсув на цю величину. У додатних вершинах додамо 7, а від від'ємних віднімемо. В результаті одержимо новий опорний план

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		0
A_1	4 15	1 45	30	40	40	60	
A_2	20	30	220	215	30	35	2
A_3	37	50	20	43	430	40	4
Потреби	22	45	20	18	30		
β_j	4	1	0	0	0		

Зауваження 3. Значення базисних клітинок, які не брали участь у циклі переписуємо без змін.

Модуль 2 — «*Економетрія*»

Предмет економетрії.
Поняття моделі та моделювання

Економетрія виникла на початку 20-х років минулого століття як самостійна галузь наукових досліджень. Термін “економетрія” означає “вимірювання в економіці”.

Економетрія – це наука, що вивчає кількісні закономірності та взаємозв’язки економічних об’єктів і процесів з допомогою математико-статистичних методів та моделей. Це самостійна економіко-математична дисципліна, що об’єднує сукупність теоретичних результатів, способів, методів та моделей, призначених для того, щоб на базі економічної теорії, статистики математичної економіки та математико-статистичного інструментарію надавати конкретне кількісне вираження загальним (якісним) закономірностям та прогнозувати результати розвитку складних економічних процесів. Таким чином, сутність економетрії полягає в синтезі трьох складових: економіки, економічної статистики та математики.

Тому знання основ прикладної математики та методів економетричного аналізу даних є невід’ємною складовою професійних навичок майбутніх спеціалістів усіх освітніх рівнів, а відповідні програмні продукти – робочим інструментом кожного спеціаліста-аналітика.

Предметом економетрії є економіка в кількісному аспекті. Об’єкт вивчення – зв’язки між народно-господарським комплексом і його найпростішими складовими та поведінкою цих складових. Область економетрії визначається моделями математичної економіки. Економетрія шукає числові параметри моделей математичної економіки. Вона займається кількісним виміром економічних об’єктів як аналогічних еквівалентів математичної моделі.

Більш конкретне і загальне визначення економетрії та її предмету дослідження міститься в енциклопедії кібернетики: “Економетрія – напрямок в економіці, що ґрунтується на використанні математичних моделей для аналізу і прогнозування економічних явищ і пов’язаний із визначенням і оцінкою адекватності реальних явищ математичним уявленням про них”. Там же: “… важко розділити математичну економіку і економетрію, з одного боку, економетрію і економічну статистику, з іншого боку. Можна лише підкреслювати зв’язок математичної економіки і економетрії”. Побудова математичної моделі економіки завжди підтверджується оцінками адекватності такої моделі в реальній дійсності. Економічна статистика має справу з сталими і відносно нескладними економічними обчисленнями. Поява економетрії пов’язана з твердженням про недостатність таких економіко-статистичних обчислень для економічного аналізу і прогнозування. Найбільшого розвитку досягли в економетрії методи множинної кореляції.

Тобто, економетрія – прикладна економіко-математична дисципліна, яка синтезує економіку, математику та статистику і не може обмежуватись лише використанням регресійного аналізу в економіці, а повинна використовувати

весь наявний математичний інструментарій прикладної математики для проведення економічних досліджень. Крім цього, економетрія виступає базовою основою для визначення альтернативних варіантів у системах прийняття управлінських рішень. В умовах конкуренції прогнозні рішення повинні прийматися на основі модельних альтернативних варіантів в тісному поєднанні з наявною інформаційною базою та сучасними програмними продуктами.

Метод "проб і помилок" у наші дні непридатний, дуже мало часу залишається для "проб" і дуже дорогими можуть бути помилки. В ринкових умовах не повинно бути місця свавільним, так званим "вольовим" рішенням. Стратегічні рішення повинні прийматися не інтуїтивно, а на підставі всебічного статистичного аналізу та математичних розрахунків. І не випадково, саме в наш час, відзначається активний ріст використання математичних методів в макро- та мікроекономічних дослідженнях. Замість того, щоб "пробувати і помилятися" на реальних об'єктах, аналітики роблять це з допомогою економіко-математичних моделей. Побудова таких моделей є однією з найважливіших задач прикладної математики.

Моделювання – процес побудови моделі, за допомогою якого вивчається функціонування об'єктів різної природи. Він складається з трьох основних елементів: суб'єкта, об'єкта дослідження та моделі, за допомогою якої суб'єкт пізнає об'єкт.

Модель – це такий матеріально або розумово зображуваний об'єкт, який у процесі дослідження замінює об'єкт-оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об'єкт.

Схематичне зображення процесу моделювання представлене на рис 1.1.

Математичне моделювання – універсальний та ефективний інструмент пізнання внутрішніх закономірностей, властивих явищам і процесам. Воно дає можливість вивчити кількісні взаємозв'язки і взаємозалежності системи, що вивчається, і вдосконалити її подальший розвиток та функціонування.

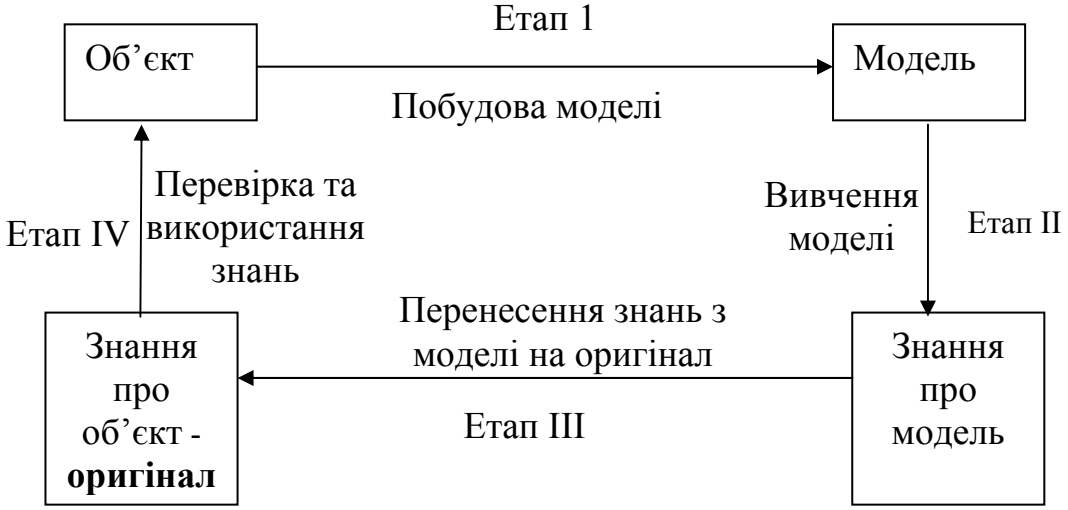


Рис. 1.1. Основні етапи моделювання

Серед існуючих систем економічні є найскладнішими, тому при побудові їх моделей слід відображати тільки найважливіші та найхарактерніші

властивості процесів або явищ, що вивчаються. Внаслідок цього всі моделі є спрощеним відображенням реальної системи, але якщо цей процес виконано коректно, то отримане наближене відображення реальної ситуації дає можливість мати достатньо точні характеристики об'єкта дослідження.

1. Загальні принципи побудови економетричних моделей. Моделі парної регресії

1.1. Регресійний аналіз та його особливості

Під регресією розуміють односторонню стохастичну залежність однієї випадкової змінної від другої чи декількох інших випадкових змінних. Таким чином, регресія встановлює відповідність між випадковими змінними. Наприклад, при визначенні залежності обсягу податкових надходжень (y) від ставки податку (x) мова йде про визначення одностороннього зв'язку, тобто про регресію. Обидві змінні є випадковими. Кожному значенню x відповідає множина значень y і навпаки, кожному значенню y відповідає множина значень x. Таким чином, ми маємо справу із статистичним розподілом значень x та y. Виходячи з цих розподілів, ми повинні знайти стохастичну залежність між y та x. Одностороння стохастична залежність виражається за допомогою функції, яка на відміну від строгої математичної залежності називається функцією регресії чи просто регресією.

Принциповою різницею між строгою функціональною залежністю та функцією регресії є те, що у першому випадку аргумент (незалежна змінна) повністю визначає значення функції, і для неї існує обернена (наприклад, функція $y = x^2$, тоді $x = \sqrt{y}$). Функція регресії цією властивістю не володіє. Отже, якщо між явищами відсутній функціональний зв'язок, а має місце тільки стохастичний, то функція регресії буде незворотною.

За числом змінних, введених у регресійне рівняння, розрізняють просту (парну) та множинну (багатофакторну) регресії. Відносно форми залежності моделі діляться на лінійну та нелінійну регресії.

При побудові регресійної функції спочатку потрібно провести ідентифікацію змінних, тобто визначити, яка із них є ознакою (залежною чи поянюваною змінною), а які є незалежними (факторами чи пояснюючими змінними). Якщо в загальному випадку рівняння регресії для двох змінних записати $y=f(x)$, то y – пояснювана змінна, а x – пояснююча. Потім потрібно провести специфікацію моделі, тобто встановити форму зв'язку між змінними.

1.2. Діаграма розсіювання регресійної функції

Для того, щоб визначити форму залежності між двома змінними використовують діаграму розсіювання, яка є графічною формою представлення інформації у прямокутній системі координат. На осі абсцис відзначають значення незалежної змінної (x), на осі ординат – значення залежної змінної (y). Результат кожного спостереження (x_i, y_i) деякого економічного процесу відображається точкою на площині. Сукупність цих точок утворює хмарку, яка відображає зв'язок між двома змінними.

За шириною розкиду точок можна зробити висновок про тісноту зв'язку сукупності. Якщо точки розміщені близько одна до одної (у вигляді вузької

смужки), то можна стверджувати про наявність відносно тісного зв'язку. Якщо точки на діаграмі розкидані широко, то має місце слабкий зв'язок між змінними, або взагалі не існує зв'язку (рис. 1.2).

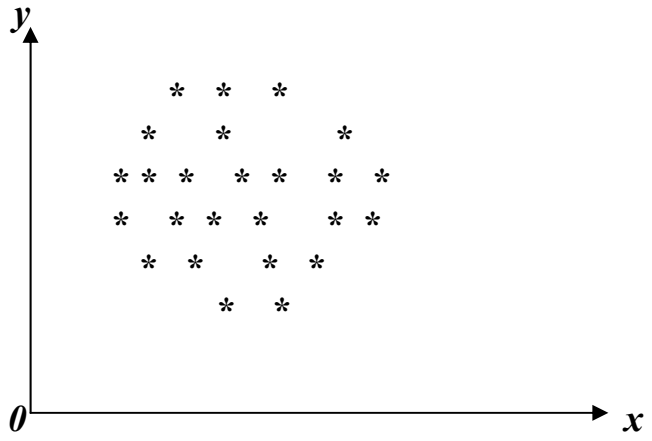
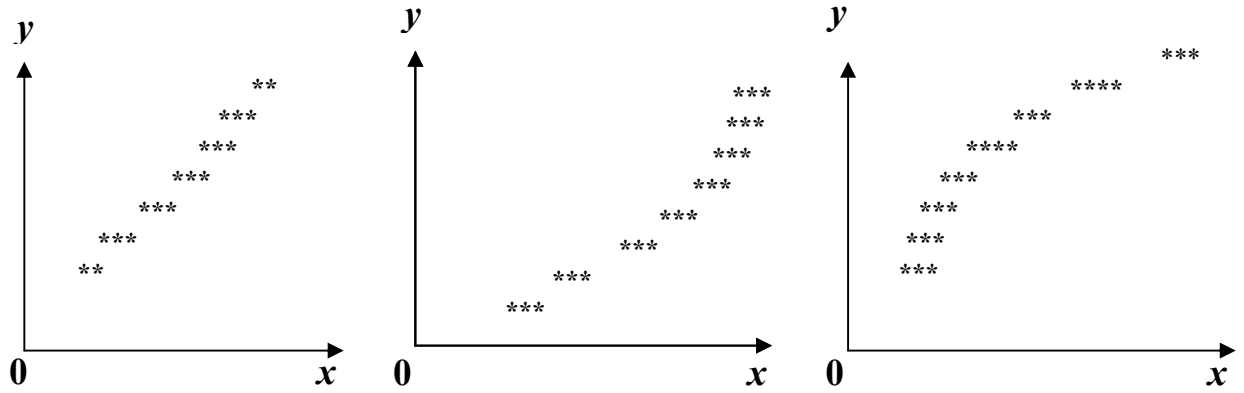


Рис. 1.2. Діаграма розсіювання у випадку відсутності зв'язку

На рис.1.3 представлені основні форми залежностей.

Додатна регресія



Від'ємна регресія

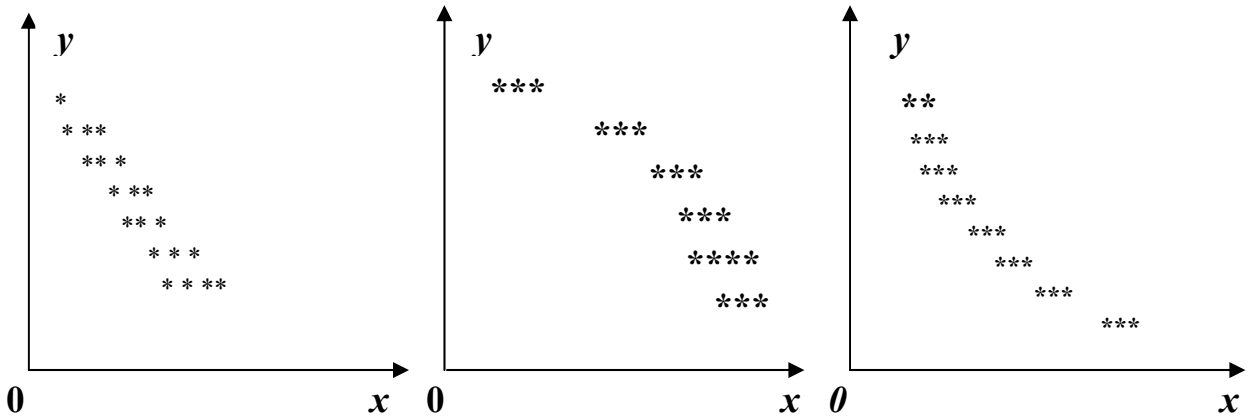


Рис. 1.3. Основні форми регресій

Отже, розрізняють додатну лінійну (а) та нелінійну (б, в) і від'ємну лінійну (г) та нелінійну (д, е) регресії.

За виглядом скупчення точок можна висунути гіпотезу про лінійність чи нелінійність взаємозв'язку між змінними. Так, на діаграмі 1.3 (а, г) маємо явно виражені лінійні тенденції скупчення точок. Спробуємо апроксимувати залежності, зображені на цих діаграмах, лінійною функцією регресії. Звичайно, ці тенденції існують лише в середньому. Вони порушені відхиленням окремих точок. Відхилення від прямої пояснюється впливом інших неврахованих факторів.

Модель парної лінійної регресії

Припустимо, що за виглядом діаграми розсіювання ми встановили, що між двома змінними існує лінійний зв'язок. Проста (парна) лінійна регресія встановлює лінійну залежність між двома змінними. При цьому одна із змінних (y) вважається залежною змінною (екзогенна, пояснювана, результативна змінна, регресант, відгук) і розглядається як функція від другої (x) незалежної змінної (ендогенна, пояснююча, регресор).

В загального випадку проста лінійна модель запишеться так:

$$y = \alpha + \beta x + u \qquad (1.1)$$

Величина $y=\{y_1, y_2 ,.., y_n\}$ (n – число спостережень) складається з двох складових:

1) невипадкової складової $\alpha+\beta x$, де $x=\{x_1,x_2,.., x_n\}$, α і β – параметри рівняння;

2) випадкової складової u (збурення, помилки) $u=\{u_1,u_2,..,u_n\}$.

Якщо y та x – це кількісні показники деяких економічних явищ чи процесів, то рівняння (1.1) називають економетричною моделлю.

Розглянемо основні причини існування збурення:

1. *Невключення в модель інших пояснюючих змінних*. Встановлення зв'язку тільки між двома факторами y та x є дуже великим спрощенням. Насправді існують інші фактори, що суттєво впливають на результативний показник, які не враховані чи не можуть бути врахованими у формулі (1.1). Вплив цих факторів приводить до того, що істинні точки лежать поза прямою. Об'єднавши всі такі можливі складові впливу на результативний показник, ми якраз отримаємо величину u. Наприклад, при вивченні залежності попиту на товар (y) від ціни на товар (x), збурена змінна u включала би в себе вплив на попит таких чинників: величина сімейного бюджету, якість товару та інші випадкові фактори. Якби ми точно знали, які змінні необхідно включати в модель, і мали можливість точно їх виміряти, то можна на їх основі будувати рівняння і тим самим виключати відповідний елемент збурення.

2. *Неправильна функціональна специфікація*. Функціональне співвідношення між y та x математично може бути визначене неправильно. Наприклад, фактична залежність не є лінійною, а може бути більш складною. Проте, використання рівняння регресії, яке найкраще описує залежність між змінними є деяким наближенням.

3. *Помилки вимірювання*. Якщо у вимірюваннях однієї чи більше

взаємозв'язаних змінних є помилки, то знайдені значення не будуть відповідати точному співвідношенню, а існуюча розбіжність буде вносити свій вклад у структуру збуреної змінної.

4. *Людський фактор*, який неможливо математично описати і нічим, крім випадкової складової відобразити не можна. Наприклад, при встановленні залежності попиту на товар від ціни на нього це можуть бути вподобання покупця.

Отже, збурення є сумарним проявом перелічених вище факторів.

Практично побудувати економетричну модель у вигляді рівняння (1.1) неможливо через випадкову складову, тому лінійну залежність між двома змінними будують у вигляді оціночного рівняння економетричної моделі, відкинувши випадкову складову:

$$\hat{y} = a + bx, \tag{1.2}$$

де a та b відповідно, представляють собою оцінки параметрів α та β рівняння (1.1). Знак "^" над y означає оцінку залежної змінної, отриману з рівняння (1.2) при деяких усереднених умовах.

Розглянемо геометричну інтерпретацію оцінок параметрів економетричної моделі.

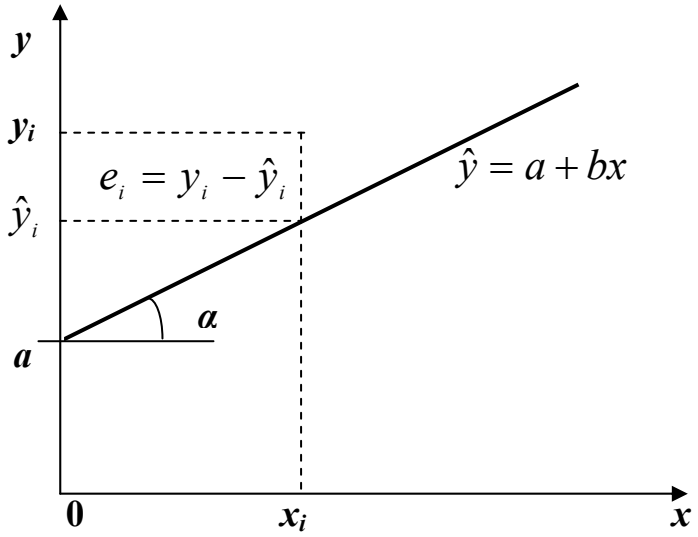


Рис. 1.4. Регресійна пряма та її параметри

Постійна величина a визначає точку перетину прямої регресії з віссю ординат (рис. 1.4) і є значенням y в точці x_0=0.

Коефіцієнт b характеризує нахил прямої до осі абсцис. Позначимо через α кут, який пряма утворює з віссю абсцис. Тоді b=tgα. Він є мірою залежності змінної y від x або мірою впливу, виявленою зміною x на y. Відповідно до рівняння (1.2) b визначає середню величину зміни результативного показника при зміні пояснювальної змінної x на одиницю. Знак b визначає напрямок цієї зміни.

Після визначення числових оцінок параметрів можна за рівнянням (1.2) обрахувати значення $\hat{y}_i$ для кожного значення пояснюючої змінної x_i. Це значення називають розрахунковим.

При лінійній функції сукупність розрахункових значень утворює пряму регресії. Як відзначалося раніше, через випадковий вплив сторонніх факторів для кожного значення x_i може спостерігатися декілька емпіричних значень y_i, тобто кожному значенню x відповідає розподіл значень змінної y. Значення функції регресії $\hat{y}_i$ таким чином є оцінками середніх значень змінної y для кожного фіксованого значення змінної x.

Звідси випливає економічна інтерпретація $\hat{y}_i$. Значення $\hat{y}_i$ показують середнє значення залежної змінної y при заданому x_i пояснюючої змінної у припущенні, що єдиною причиною зміни y є змінна x, а випадкова збурена змінна u прийняла значення, рівне нулеві. Розкид фактичних значень змінної y довкола $\hat{y}_i$ зумовлений впливом множини неврахованих факторів. Різницею між емпіричним значенням y_i і розрахунковим $\hat{y}_i$ назвемо залишком, який дає числову оцінку значенням збуреної змінної u (рис. 1.4). Отже, числове значення e визначається як $y_i - \hat{y}_i = e_i$, $i = \overline{1,n}$. Зрозуміло, що, чим менше значення e_i, тим вдаліше вибрана пряма.

Таким чином, ми підійшли до проблеми оцінювання невідомих параметрів α та β.

1.4. Методи знаходження оцінок параметрів економетричної моделі з двома змінними

а) Метод найменших квадратів (МНК) за системою нормальних рівнянь. Цей метод є найточнішим методом знаходження оцінок параметрів економетричної моделі. Провівши економічний аналіз певного процесу з врахуванням характеру хмарки точок на діаграмі розсіювання, переходимо до вирівнювання дослідних даних, яке полягає у побудові гіпотетичної лінії. Основною вимогою при цьому є зведення до мінімуму помилок специфікації форм зв'язку між змінними. Ці помилки визначаються через відхилення емпіричних даних y_i від значень регресії $\hat{y}_i$, тобто вони формують значення збуреної змінної e:

$$y_i - \hat{y}_i = e_i$$

З графіка (рис. 1.4) бачимо, що e_i – відхилення дослідної точки від оціночної прямої, виміряне по вертикалі. Це відхилення може бути додатнім чи від'ємним в залежності від того, по яку сторону від лінії розміщена конкретна точка.

При виборі прямої можна висунути вимогу, щоб сума відхилень всіх точок від лінії регресії була рівна нулеві, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i = 0.$$

Ця умова означає, що сума додатних відхилень повинна бути рівною сумі від'ємних. Дотримання даної умови не дає можливості однозначно визначити розміщення вирівнюючої прямої на площині. Дану умову задовольняє нескінчена множина прямих, тобто через задану точку з координатами (x_i;y_i) проходить пучок прямих.

Для знаходження однозначного розв'язку використовуємо один із показників розсіювання випадкової величини – дисперсію. Якщо всі відхилення піднести до квадрату і просумувати, то результат буде безпосередньо залежати від розкиду точок довкола шуканої лінії. Із множини можливих прямих має бути вибрана така, для якої міра розсіювання дослідних точок буде мінімальною. Це можна представити наступним чином:

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2\to\quad\min, \quad (1.3)$$

тобто сума квадратів відхилень емпіричних значень змінної y від значень, обчислених за рівнянням прямої, повинна бути мінімальною.

Метод, в основу якого покладена вимога мінімізації суми квадратів відхилень, називається методом найменших квадратів (МНК). З його допомогою знаходять такі оцінки параметрів рівняння регресії, які зводять до мінімуму вибрану міру розсіювання. При цьому проходить вирівнювання емпіричних значень в одну лінію регресії. У випадку лінійного зв'язку між змінними ця лінія є прямою.

Таким чином, проблема визначення прямої регресії зводиться до мінімізації функції (1.3). Необхідною умовою цього є перетворення в нуль перших частинних похідних цієї функції по кожній змінній a та b. Візьмемо ці частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)(-1)=0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)(-x_i)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0\\[2ex]-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)x_i=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0\\[2ex]\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)x_i=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-na-b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0\\[2ex]\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_1-a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-b\sum\limits_{i=1}^{n}x_1^2=0\end{cases}$$

В результаті виконання перетворень отримаємо наступну систему, яка називається системою нормальних рівнянь:

$$\begin{cases}na+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\\[2ex]a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i,\end{cases}\qquad(1.4)$$

розв'язавши яку, знаходимо a та b:

Розв'язки системи (1.4) методом Крамера можна знайти за формулами:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \quad (1.5)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \quad (1.6)$$

Значення a та b, обчислені за формулами (1.5) і (1.6), є оцінками параметрів α та β регресії, отримані МНК. Маючи значення a та b можна обрахувати значення регресії для заданої області значень пояснюючої змінної x. Ці значення представляють собою найкращу з точки зору МНК лінійну апроксимацію для емпіричних значень y_i, оскільки вибрана міра розсіювання – стандартне відхилення зводиться при цьому до мінімуму.

б) МНК через відхилення від середніх**.** Розглянемо методику оцінювання параметрів з допомогою методу відхилень від середніх арифметичних. Основу даного методу складають властивості оцінок, знайдених МНК, які полягають в тому, що лінія регресії обов'язково проходить через точку середніх значень $(\bar{x}, \bar{y})$.

Поділимо перше рівняння системи (1.4) на n:

$$\frac{na}{n} + b\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

У результаті отримаємо

$$a + b\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \text{або}$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x}. \quad (1.7)$$

Далі віднімемо від розрахункового значення змінної y (1.2) її середнє

значення, знайдене за формулою (1.7):

$$\hat{y}-\bar{y}=a+bx-(a+b\bar{x})=b(x-\bar{x}).$$

Звідси $\hat{y}=\bar{y}+b(x-\bar{x})$. (1.8) Тоді відхилення фактичних значень змінної *y* від розрахункових, знайдених по формулі (1.8):

$$e_i=y_i-\hat{y}_i=(y_i-\bar{y})-b(x_i-\bar{x}).$$

$y_i-\bar{y}$ та $x_i-\bar{x}$ – це відхилення змінних *y* та *x* від їх середніх значень. Для простоти позначимо їх Δy_i та Δx_i.

Дальше розглядаємо функцію, що представляє собою суму квадратів відхилень дійсних значень змінної *y* від розрахункових і досліджуємо її на *min*.

$$F(b)=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta y_i-b\Delta x_i\right)^2 \quad \to \quad \min$$

Оскільки отримана функція залежить тільки від *b*, то знаходимо частинну похідну цієї функції по *b* і прирівнюємо її до нуля.

$$\frac{\partial F}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta y_i-b\Delta x_i\right)\Delta x_i=-2\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\Delta y_i-b(\Delta x_i)^2\right)=$$

$$=-2\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\Delta y_i\right)+2b\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}=0 \quad \Rightarrow \quad -2\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\Delta y_i\right)+2b\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\Delta y_i\right)-b\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\Delta y_i\right)=b\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2.$$

Звідси знаходимо параметр *b*:

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\Delta y_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\right)^2}. \tag{1.9}$$

Значення оцінки *a* знайдемо з формули (1.7):

$$a=\bar{y}-b\bar{x} \tag{1.10}$$

Формули (1.9) та (1.10) – це формули для знаходження оцінок параметрів економетричної моделі методом найменших квадратів через відхилення від середніх.

Формулу (1.9) можна представити в іншому вигляді. Якщо розділити чисельник і знаменник на $\frac{1}{n}$, то отримаємо:

$$b = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i \Delta y_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\right)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}.$$

Ми отримали в чисельнику коефіцієнт коваріації між змінними x та y, який обчислюється за формулою:

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)(y_i - \bar{y})}{n},$$

а в знаменнику маємо дисперсію змінної x, яка знаходиться за формулою:

$$\sigma^2(x) = \operatorname{var}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Тоді формула (1.9) матиме вигляд:

$$b = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\operatorname{var}(x)}.$$

<u>Приклад 1.1.</u> Для десяти підприємств регіону за умовний деякий період відомі числові значення двох економічних показників: валова продукція y (млн. грн.) і вартість основних виробничих фондів x (млн. грн.), (табл.1.1). Для дослідження характеристики впливу вартості основних виробничих фондів (x) на випуск валової продукції (y) підприємства з допомогою економетричної моделі необхідно:

1. Зробити специфікацію моделі.
2. Знайти оцінки параметрів моделі з допомогою МНК (за системою нормальних рівнянь та через відхилення від середніх).
3. Побудувати оціночну пряму.

Таблиця 1.1

№ підприємства	Валовий випуск продукції, млн.грн., y_i	Основні виробничі фонди, млн.грн., x_i
1	2,2	1,4
2	4,2	2,2
3	5,7	3,3
4	6,8	2,6
5	5,9	3,2
6	7,6	4,5
7	9,5	5,1
8	8,4	6,7
9	10,1	7,3
10	12,3	8,9

♦ ***Розв'язування.***

1. Побудуємо діаграму розсіювання залежності валового випуску продукції (y) від вартості основних виробничих фондів підприємства (x):

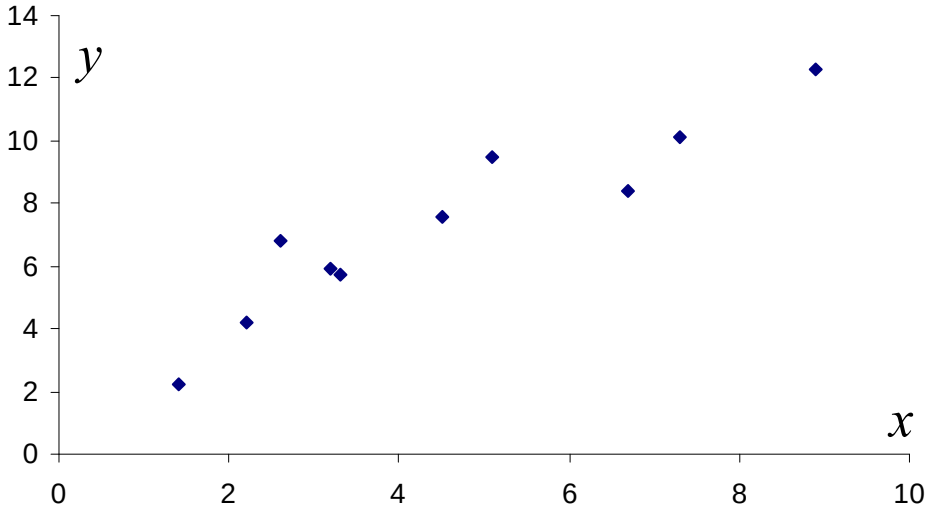


Рис.1.5. Діаграма розсіювання

Розміщення точок на діаграмі розсіювання дає можливість зробити припущення про існування лінійної форми зв'язку у вигляді функції (1.2):

$$\hat{y}=a+bx,$$

де $\hat{y}$ – розрахунковий обсяг випуску валової продукції, млн. грн.; x – вартість основних виробничих фондів, млн. грн.

2. Для спрощення розрахунків при знаходженні оцінок a та b параметрів економетричної моделі побудуємо таблицю:

№ п/п	y_i	x_i	x_i^2	$xi \cdot yi$	Δx_i	$(\Delta x_i)^2$	Δy_i	$\Delta x_i \cdot \Delta y_i$
1	2,2	1,4	1,96	3,08	-3,12	9,73	-5,07	15,82
2	4,2	2,2	4,84	9,24	-2,32	5,38	-3,07	7,12
3	5,7	3,3	10,89	18,81	-1,22	1,49	-1,57	1,92
4	6,8	2,6	6,76	17,68	-1,92	3,69	-0,47	0,9
5	5,9	3,2	10,24	18,88	-1,32	1,74	-1,37	1,81
6	7,6	4,5	20,25	34,2	-0,02	0	0,33	-0,01
7	9,5	5,1	26,01	48,45	0,58	0,34	2,23	1,29
8	8,4	6,7	44,89	56,28	2,18	4,75	1,13	2,46
9	10,1	7,3	53,29	73,73	2,78	7,73	2,83	7,87
10	12,3	8,9	79,21	109,47	4,38	19,18	5,03	22,03
Сума	**72,7**	**45,2**	**258,34**	**389,82**	**0**	**54,04**	**0**	**61,22**

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\frac{45,2}{10}=4,52; \qquad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}=\frac{72,7}{10}=7,27.$$

$$\Delta x_1 = x_1 - \bar{x} = 1{,}4 - 4{,}52 = -3{,}12;$$
$$\Delta x_2 = x_2 - \bar{x} = 2{,}2 - 4{,}52 = -2{,}32;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta x_{10} = x_{10} - \bar{x} = 8{,}9 - 4{,}52 = 4{,}38.$$

Запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad \begin{cases} 10a + 45{,}2b = 72{,}7 \\ 45{,}2a + 258{,}34b = 389{,}82 \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} a = -4{,}52b + 7{,}27 \\ 45{,}2(-4{,}52b + 7{,}27) + 258{,}34b = 389{,}82 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -4{,}52b + 7{,}27 \\ -204{,}3b + 328{,}6 + 258{,}34b = 389{,}82 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -4{,}52b + 7{,}27 \\ 54{,}04b = 61{,}22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4{,}52b + 7{,}27 \\ b = 1{,}13 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -4{,}52 \cdot 1{,}13 + 7{,}27 \\ b = 1{,}13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2{,}17 \\ b = 1{,}13 \end{cases}$$

Знайдемо ці ж оцінки за формулами відхилень від середніх (1.9) та (1.10):

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i \Delta y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} = \frac{61{,}22}{54{,}04} = 1{,}13;$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 7{,}27 - 1{,}13 \cdot 4{,}52 = 7{,}27 - 5{,}1 = 2{,}17.$$

Отже, нами отримано оціночне рівняння економетричної моделі

$$\hat{y} = 2{,}17 + 1{,}13x.$$

3. Побудуємо оціночну пряму $\hat{y} = 2{,}17 + 1{,}13x$.

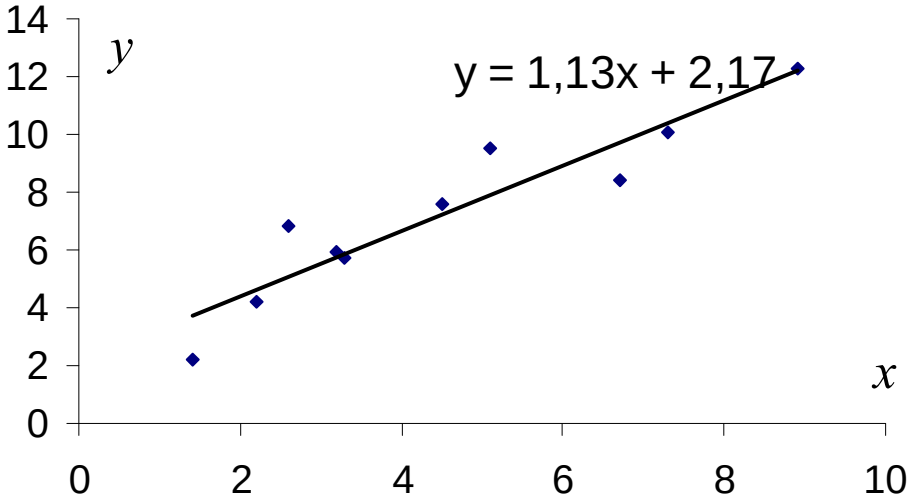


Рис.1.6. Діаграма розсіювання та оціночна пряма

1.5. Загальна, пояснююча та непояснююча дисперсії. Коефіцієнти кореляції та детермінації

Побудова рівняння регресії дає нам можливість розкласти значення y_i в кожному спостереженні на дві складові:

$$y_i = \hat{y}_i + e_i. \tag{1.11}$$

Величина $\hat{y}_i$ – розраховане за оціночним рівнянням економетричної моделі значення результативного показника в *i*-му випадку. Залишок e_i є розбіжністю між фактичним і прогнозним значенням змінної *y*, тобто, та частина *y*, яку ми не можемо пояснити з допомогою рівняння регресії. Знайдемо

$$\mathrm{var}(y) = \mathrm{var}(\hat{y} + e) = \mathrm{var}(\hat{y}) + \mathrm{var}(e) + 2\,\mathrm{cov}(\hat{y}, e). \tag{1.12}$$

Врахувавши, що $\mathrm{cov}(\hat{y}, e) = 0$, будемо мати:

$$\mathrm{var}(y) = \mathrm{var}(\hat{y}) + \mathrm{var}(e). \tag{1.13}$$

Дане співвідношення означає, що ми можемо розкласти загальну дисперсію var(*y*) на дві складові: $\mathrm{var}(\hat{y})$ – частина, яка пояснює рівняння регресії (пояснююча дисперсія) і var(*e*) – непояснююча частина (дисперсія помилок або не пояснююча дисперсія).

У лівій частині (1.13) маємо варіацію залежної змінної *y* навколо свого вибіркового середнього значення $\bar{y}$, а у правій – варіації розрахункових значень $\hat{y}$ навколо середнього значення $\bar{y}$ та фактичних значень *y*. За означенням дисперсії (1.13) прийме наступний вид:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n},$$

$$\sigma^2_{\text{заг}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \text{ – загальна дисперсія;} \quad (1.14)$$

$$\sigma^2_{\text{поясн.}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 \text{ – пояснююча дисперсія;} \quad (1.15)$$

$$\sigma^2_{\text{непоясн.}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \text{ – дисперсія помилок, або} \quad (1.16)$$

непояснююча дисперсія.

Тобто, з (1.14) маємо: $\sigma^2_{\text{заг}} = \sigma^2_{\text{поясн.}} + \sigma^2_{\text{непоясн.}}$.

Якщо загальну дисперсію вважати незмінною, то чим більша буде пояснююча дисперсія, тим менша непояснююча, а значить менший розкид точок на діаграмі розсіювання відносно оціночної прямої.

Далі поділимо обидві частини (1.13) на *var*(*y*) і отримаємо:

$$1 = \frac{\text{var}(\hat{y})}{\text{var}(y)} + \frac{\text{var}(e)}{\text{var}(y)} \quad (1.17)$$

Як можна побачити з виразу (1.17) перша частина $\frac{\text{var}(\hat{y})}{\text{var}(y)}$ є складовою дисперсії, яку можна пояснити через лінію регресії. Друга частина $\frac{\text{var}(e)}{\text{var}(y)}$ є пропорцією дисперсії помилок у загальній дисперсії, тобто являє собою частину дисперсії, яку не можна пояснити через регресійний зв'язок.

Частина дисперсії, що пояснюється регресією, називається коефіцієнтом детермінації і позначається *d* або r^2:

$$d = r^2 = \frac{\text{var}(\hat{y})}{\text{var}(y)} = \frac{\sigma^2_{поясн.}}{\sigma^2_{заг.}} = 1 - \frac{\sigma^2_{непоясн.}}{\sigma^2_{заг.}} \quad (1.18)$$

З цієї формули видно, що коефіцієнт детермінації завжди додатній і знаходиться в межах від нуля до одиниці. Максимальне значення *d*=1, за умови, що лінія регресії точно відповідає всім спостереженням ($\hat{y}_i = y_i$ і всі залишки рівні нулю). Тоді $\text{var}(\hat{y}) = \text{var}(y)$. Якщо ж для вибірки відсутній зв'язок між змінними *y* та *x*, то коефіцієнт *d* буде близький до нуля.

Після побудови регресійної моделі необхідно оцінити тісноту зв'язку між результативною та факторною змінними. Для цього необхідно розрахувати коефіцієнт кореляції, який саме характеризує ступінь щільності лінійної залежності між випадковими величинами *x* та *y*. Він позначається *r* і розраховується за формулою:

$$r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}},$$

де cov(x,y) – коефіцієнт коваріації між змінними *x* та *y*, var(x), var(y) – дисперсії змінних *x* та *y*, а σ_x, σ_y – їх середні квадратичні відхилення.

Коефіцієнт кореляції, на відміну від коефіцієнта коваріації, є вже не абсолютною, а відносною мірою зв'язку між двома факторами і приймає значення з інтервалу [-1;1]. Додатне значення кореляції свідчить про наявність прямого зв'язку між змінними, а від'ємне – про зворотній зв'язок. Якщо коефіцієнт кореляції прямує до ±1, то мова йде про наявність тісного лінійного зв'язку між змінними. У той же час, коли він прямує до нуля, то лінійний зв'язок між змінними слабкий. Але, якщо нами отримано *r*=0, то не треба спішити з висновками про відсутність зв'язку між змінними. Можна лише робити висновок про відсутність лінійного зв'язку, але між вибраними змінними може існувати тісний нелінійний зв'язок. Коефіцієнт кореляції дає можливість робити висновок про тісноту саме лінійного зв'язку між змінними.

Подивимось, чи існує зв'язок між коефіцієнтом детермінації і коефіцієнтом кореляції. Для цього здійснимо наступні перетворення для коефіцієнта детермінації:

$$d=\frac{\sigma^2_{поясн.}}{\sigma^2_{заг.}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i-(a-b\bar{x}))^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(b(x_i-\bar{x}))^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{b^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=b^2\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}.$$

Виконаємо аналогічні перетворення для коефіцієнта кореляції, врахувавши, що $b=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var}(x)}$:

$$r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_x}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=b\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

З останньої формули видно, що знак коефіцієнта кореляції визначається знаком оцінки *b*.

Ми бачимо, що коефіцієнт кореляції є коренем квадратним з коефіцієнта детермінації: $r=\pm\sqrt{d}$. (1.19)

<u>Приклад 1.2.</u> На основі даних прикладу 1.1 потрібно:

1. Обчислити загальну, пояснюючу та непояснюючу дисперсію.
2. Знайти значення коефіцієнтів детермінації та кореляції.

♦***Розв'язування.***

1. Для знаходження дисперсій використаємо наступні формули:

$$\sigma^2_{\text{заг.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n}; \sigma^2_{\textit{поясн.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n}; \sigma^2_{\text{непоясн.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}.$$

Для спрощення підрахунків побудуємо таблицю, взявши середні значення змінних з прикладу 1.1:

$$\bar{y} = 7{,}27; \qquad \bar{x} = 4{,}52.$$

№ п/п	y_i	x_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$\hat{y}_i - \bar{y}$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	2,2	1,4	-5,07	25,7	3,74	-3,53	12,49	-1,54	2,36
2	4,2	2,2	-3,07	9,42	4,64	-2,63	6,91	-0,44	0,2
3	5,7	3,3	-1,57	2,46	5,89	-1,38	1,91	-0,19	0,04
4	6,8	2,6	-0,47	0,22	5,09	-2,18	4,73	1,71	2,91
5	5,9	3,2	-1,37	1,88	5,77	-1,50	2,24	0,13	0,02
6	7,6	4,5	0,33	0,11	7,25	-0,02	0	0,35	0,12
7	9,5	5,1	2,23	4,97	7,93	0,66	0,43	1,57	2,47
8	8,4	6,7	1,13	1,28	9,74	2,47	6,1	-1,34	1,79
9	10,1	7,3	2,83	8,01	10,42	3,15	9,92	-0,32	0,1
10	12,3	8,9	5,03	25,3	12,23	4,96	24,62	0,07	0
Сума	**72,7**	**45,2**	**0**	**79,36**	**72,7**	**0**	**69,35**	**0**	**10,01**

Отже, маємо:

$$\sigma^2_{\text{заг}} = \frac{79{,}36}{10} = 7{,}936; \sigma^2_{\text{поясн.}} = \frac{69{,}35}{10} = 6{,}935; \sigma^2_{\text{непоясн.}} = \frac{10{,}01}{10} = 1{,}001.$$

2. Знайдемо значень коефіцієнтів детермінації та кореляції.

Для обчислення коефіцієнта детермінації використовуємо формулу:

$$d = \frac{\sigma^2_{\text{поясн.}}}{\sigma^2_{\text{заг.}}} = \frac{6{,}935}{7{,}936} = 0{,}87,$$

а це означає, що 87 % загальної дисперсії пояснюється оціночною прямою, на долю неврахованих факторів припадає 13 %.

Коефіцієнт кореляції знайдемо за формулою:

$$r = \pm\sqrt{d} = \sqrt{0{,}87} = 0{,}93.$$

Знак коефіцієнта кореляції визначається знаком кутового коефіцієнта оціночного рівняння b (в нашому випадку він додатний). Отримане значення коефіцієнта кореляції вказує на ступінь тісноти лінійного зв'язку між змінними. Значення коефіцієнта кореляції рівне 0,93 (близьке до одиниці), а це значить, що лінійна форма зв'язку між змінними y та x вибрана вірно і цей зв'язок тісний.

1.6. Умови Гаусса-Маркова для випадкової змінної

При використанні МНК для знаходження оцінок параметрів моделі випадкова змінна (збурення, випадковий член) повинна задовольняти чотири умови, що мають назву умови Гаусса-Маркова.

1. Математичне сподівання випадкової змінної для всіх спостережень рівне нулю:

$$M(u_i)=0,\ i=\overline{1,n},$$

де n – кількість спостережень.

Інколи випадковий член моделі може бути додатнім, а інколи – від'ємним. Однак він не має мати систематичного зміщення в жодному можливому напрямку.

2. Дисперсія випадкової змінної повинна бути постійною для всіх спостережень (властивість гомоскедастичності):

$$M(u_i^2)=\sigma_u^2, \qquad i=\overline{1,n}.$$

3. Відсутність систематичного зв'язку між значеннями випадкової змінної в будь-яких спостереженнях:

$$M(u_i,u_j)=0, \qquad i\neq j, \quad i,j=\overline{1,n}.$$

Це означає, що випадкові величини незалежні між собою, тобто значення випадкової змінної u в i-му спостереженні не залежить від того, яке значення вона прийме в j–му спостереженні.

4. Випадкова змінна повинна бути розподіленою незалежно від пояснюючих змінних:

$$M(x_i,u_j)=0, \qquad i,j=\overline{1,n}.$$

Значення будь-якої незалежної змінної в кожному спостереженні вважається екзогенним, повністю визначеним зовнішніми причинами, які не враховані в рівнянні регресії.

Крім приведених вище умов припускається дотримання нормального закону розподілу випадкового члена з нульовим математичним сподіванням і постійною дисперсією. Припущення про нормально розподілені величини ґрунтується на центральній граничній теоремі, яка стверджує, що, якщо випадкова величина є загальним результатом взаємодії значного числа інших випадкових величин, то вона буде мати приблизно нормальний розподіл, навіть якщо окремі складові не матимуть його.

1.7. Властивості оцінок параметрів моделі парної регресії

Розрізняють точкові та інтервальні оцінки параметрів економетричної моделі.

Точковою оцінкою параметра економетричної моделі називають знайдену оцінку цього параметру.

Інтервальною оцінкою параметра економетричної моделі називають інтервал, в межах якого з певною заданою ймовірністю знаходиться істинне значення цього параметру.

Оцінки параметрів економетричної моделі мають такі властивості:

1) Незміщеність.

Вибіркова оцінка b параметра β називається *незміщеною*, якщо вона задовольняє умову $M(b)=\beta$.

2) Обґрунтованість (спроможність).

Вибіркова оцінка b параметра β називається *обґрунтованою (спроможною)*, якщо для як завгодно малого числа ε справджується умова

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|b-\beta\right| \le \varepsilon\right) = 1,$$

тобто при збільшенні об'єму вибірки до безмежності оцінка як завгодно близько наближається до істинного параметру.

Ми бачимо, що оцінка є обґрунтованою, якщо вона задовольняє закон великих чисел. Обґрунтованість помилки означає, що чим більші будуть вибірки, тим більша ймовірність того, що помилка оцінки не перевищує як завгодно малого числа ε.

3) Ефективність.

Вибіркова оцінка b параметра β називається *ефективною*, якщо вона має найменшу дисперсію.

Теорема Гауса-Маркова. Якщо для залишкового члена рівняння (1.1) виконуються умови Гауса-Маркова, то оцінки a і b, розраховані за методом найменших квадратів, мають найменшу дисперсію в класі всіх лінійних незміщених оцінок.

Оцінки a і b, знайдені методом найменших квадратів є незміщеними, ефективними та спроможними.

1.8. Побудова довірчих інтервалів

Надійність оцінки визначається ймовірністю, з якою стверджується що побудований за результатами вибірки довірчий інтервал містить невідомий параметр генеральної сукупності. Ймовірність інтервальної оцінки параметра називають довірчою і позначають p. Тоді можна сподіватися, що при множині спостережень параметр генеральної сукупності буде правильно оцінений (тобто довірчий інтервал покриє дійсне значення цього параметра) приблизно у $p\cdot 100\%$ випадків і лише у $(100-p)$ % випадків оцінка буде помилковою.

Ризик помилки визначається рівнем значущості α, який називається довірчим рівнем даного інтервалу.

Позначимо параметр генеральної сукупності через λ, а його оцінку – μ. Тоді, за означенням довірчого інтервалу, будемо мати наступну формулу:

$$P\left(\mu - k\sigma_\mu \le \lambda \le \mu + k\sigma_\mu\right) = 1-\alpha,$$

де k – довірчий множник, який відображає частку стандартного відхилення, яка повинна бути врахована, щоб із заданою ймовірністю p довірчий інтервал $\left[\mu - k\sigma_\mu ; \mu + k\sigma_\mu\right]$ покрив параметр λ генеральної сукупності.

Перейдемо до побудови довірчих інтервалів для параметрів парної лінійної регресії. Знайдемо довірчий інтервал для оціночного рівняння. Для цього нам необхідно мати похибку оцінки, яку знайдемо за формулою:

$\Delta_{yx} = t_p \cdot \sigma_{\text{непоясн.}}$, де t_p – ймовірнісний коефіцієнт, значення якого при заданому рівні ймовірності p знаходимо за таблицями нормального розподілу. Значення t_p є коренем рівняння $2\Phi(t_p) = p$, де $\Phi(t_p)$ – інтегральна функція Лапласа.

Тоді довірчий інтервал для оціночного рівняння матиме вигляд:

$$\hat{y}_i - \Delta_{yx} \le y_i \le \hat{y}_i + \Delta_{yx}. \tag{1.20}$$

Графічно довірчий інтервал можна зобразити таким чином:

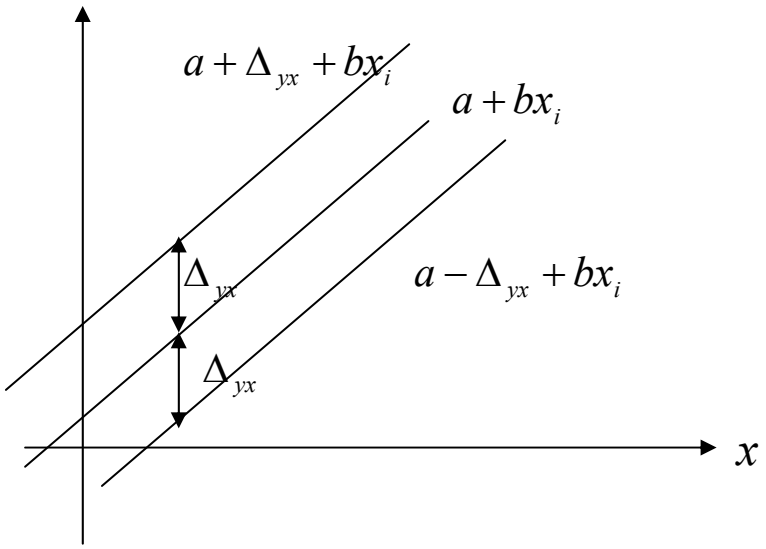


Рис. 1.7. Довірчий інтервал оціночного рівняння

Процедура побудови довірчих інтервалів для параметрів α та β аналогічна попередній процедурі. Спочатку знаходимо граничні похибки оцінок відповідних параметрів за формулами:

$$\Delta_a = \sigma_a \cdot t_p; \quad \Delta_b = \Delta_b \cdot t_p \tag{1.21}$$

де σ_a^2, σ_b^2 – відповідно дисперсії оцінок a та b, значення яких обчислюються за формулами:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2_{\text{непоясн.}} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\text{n} \cdot \sum_{\text{i}=1}^{\text{n}} (x_{\text{i}} - \overline{x})^2}, \qquad \sigma_b^2 = \frac{\sigma^2_{\text{непоясн.}}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \tag{1.22}$$

Отже, довірчі інтервал для параметрів α та β матимуть вигляд:

$$a - \Delta_a \le \alpha \le a + \Delta_a, \tag{1.23}$$

$$b - \Delta_b \le \beta \le b + \Delta_b. \tag{1.24}$$

<u>Приклад 1.3.</u> На основі даних прикладів 1.1 та 1.2 побудувати довірчі інтервали оціночного рівняння і параметрів α та β економетричної моделі для ймовірності p=0,9.

♦Розв'язування.

Обчислимо граничну похибку $\Delta_{yx} = t_p \cdot \sigma_{\text{непоясн.}}$. Значення t_p знайдемо, розв'язавши рівняння: $2\Phi(t_p) = p$, де $\Phi(t_p)$ - інтегральна функція Лапласа. Для p=0,9 маємо: t_p=1,65. Також знайдемо $\sigma_{\text{непоясн.}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{непоясн.}}} = \sqrt{1{,}001} = 1{,}0005$

Тоді $\Delta_{yx} = 1{,}65 \cdot 1{,}0005 = 1{,}651$.

Довірчий інтервал матиме вигляд:

$$\hat{y}_i - 1{,}651 \le y_i \le \hat{y}_i + 1{,}651,$$

$$2{,}17 + 1{,}13x_i - 1{,}651 \le y_i \le 2{,}17 + 1{,}13x_i + 1{,}651,$$

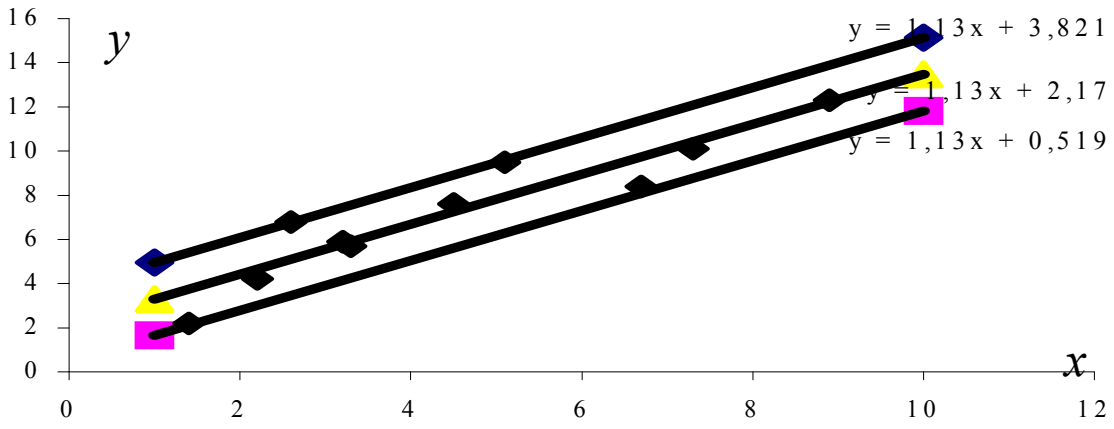
$$1{,}13x_i + 0{,}519 \le y_i \le 1{,}13x_i + 3{,}821.$$

Для побудови оціночного рівняння, верхньої та нижньої межі довірчого інтервалу достатньо по дві точки. Обчислимо їх:

Нижня межа $y = 1{,}13x + 0{,}519$	
x	y
1	1,65
10	11,82

Оціночна пряма $y = 1{,}13x + 2{,}17$	
x	y
1	3,30
10	13,47

Верхня межа $y = 1{,}13x + 3{,}821$	
x	y
1	4,95
10	15,12



Знайдемо довірчі інтервали для α та β. Почнемо із обчислення граничних похибок оцінок цих параметрів:

$$\Delta_a = \sigma_a t_p\ , \quad \Delta_b = \sigma_b t_p\ .$$

Для цього спочатку знайдемо значення дисперсій і середніх квадратичних відхилень оцінок a та b за формулами:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma^2_{\text{непоясн.}}}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \frac{258{,}34 \cdot 1{,}001}{10 \cdot 54{,}04} = 0{,}48, \qquad \sigma_a = \sqrt{0{,}48} = 0{,}69.$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma^2_{\text{непоясн.}}}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \frac{1{,}001}{54{,}04} = 0{,}02, \qquad \sigma_b = \sqrt{0{,}02} = 0{,}14.$$

Далі знайдемо

$$\Delta_a = \sigma_a \cdot t_p = 0{,}69 \cdot 1{,}65 \approx 1{,}14;$$
$$\Delta_b = \sigma_b \cdot t_p = 0{,}14 \cdot 1{,}65 = 0{,}23.$$

Отже, нами отримано наступні інтервали довіри для оцінки α:

$$a \in \left[a - \Delta_a;\ \ a + \Delta_a\right],$$
$$a \in \left[2{,}17 - 1{,}14;\ \ 2{,}17 + 1{,}14\right],$$
$$1{,}03 \le \alpha \le 3{,}31,$$

для оцінки β:

$$\beta \in \left[b - \Delta_b;\ \ b + \Delta_b\right],$$
$$\beta \in \left[1{,}13 - 0{,}23;\ \ 1{,}13 + 0{,}23\right]$$
$$0{,}9 \le \beta \le 1{,}36.$$

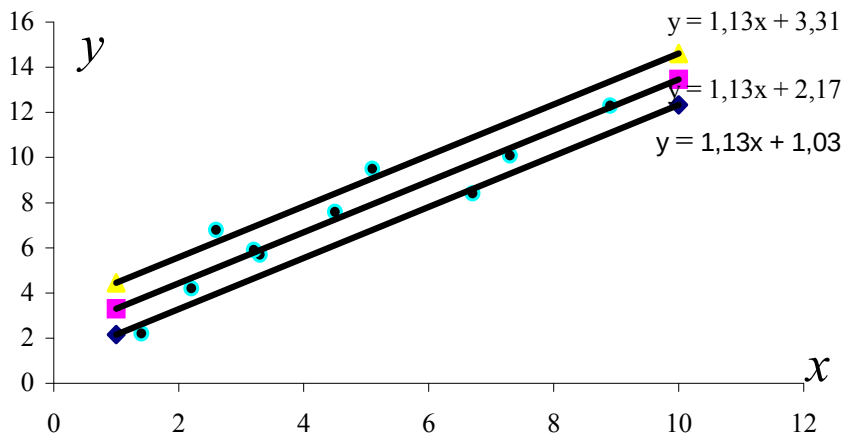
Відобразимо ці довірчі інтервали графічно. Обчислимо координати двох точок для побудови нижньої та верхньої меж довірчого інтервалу для α.

Нижня межа $y = 1{,}13x + 1{,}03$	
x	y
1	2,16
10	12,33

Оціночна пряма $y = 1{,}13x + 2{,}17$	
x	y
1	3,30
10	13,47

Верхня межа $y = 1{,}13x + 3{,}31$	
x	y
1	4,44
10	14,61

Для β:

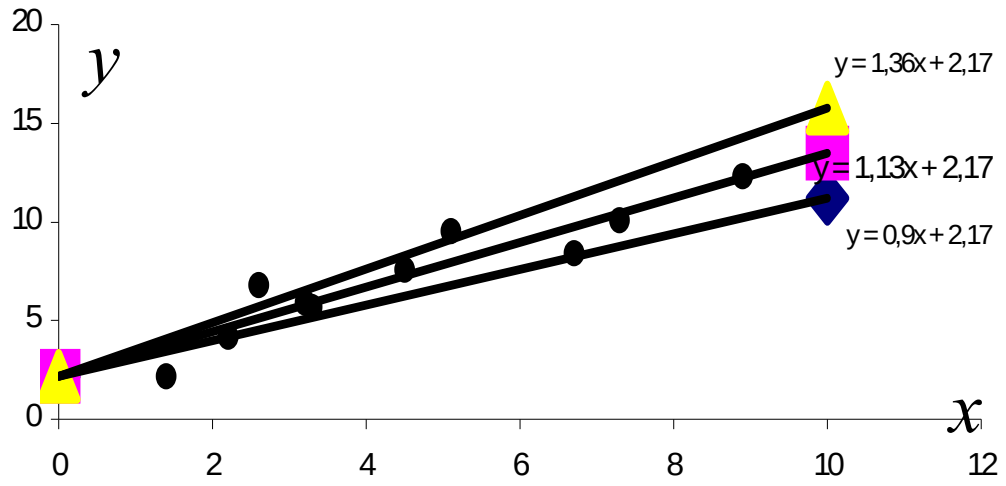


Нижня межа $y = 0{,}9x + 2{,}17$	
x	y
0	2,17
10	11,17

Оціночна пряма $y = 1{,}13x + 2{,}17$	
x	y
0	2,17
10	13,47

Верхня межа $y = 1{,}36x + 2{,}17$	
x	y
0	2,17
10	15,77

1.9. Перевірка нульових гіпотез



Оскільки статистичні дані, які ми досліджуємо, створені різними випадковими факторами, то більшість статистичних досліджень супроводжується перевіркою деяких припущень або гіпотез про джерела цих даних.

Основне припущення, яке перевіряється, називається нульовою гіпотезою і позначається H_o переважно формулюється як відсутність різниць, відсутність впливу фактора, рівність нулю значень вибіркових характеристик і т.д.

Друге припущення, яке перевіряється (не завжди строго протилежне чи обернене першому), називається конкуруючою або альтернативною гіпотезою і позначається H_1.

Для статистичного висновку про наявність або відсутність кореляційного зв'язку між досліджуваними змінними необхідно провести перевірку рівня значущості вибіркового коефіцієнта кореляції. Використаний критерій для розв'язку задач даного типу ґрунтується на розподілі різних статистик і називається критерієм значущості.

Процедура перевірки значущості починається з формулювання нульової гіпотези H_o. У загальному випадку вона полягає в тому, що між параметром вибірки і параметром генеральної сукупності немає ніяких суттєвих різниць. Альтернативна гіпотеза H_1 полягає в тому, що між цими параметрами є суттєві різниці. Наприклад, при перевірці наявності кореляції в генеральній сукупності нульова гіпотеза полягає в тому, що істинний коефіцієнт кореляції рівний нулю (Ho: R=0). Якщо в результаті перевірки виявиться, що нульова гіпотеза неприйнятна, то нульова гіпотеза відкидається і приймається альтернативна H_1.

Іншими словами, припущення відносно некорельованості випадкових змінних у генеральній сукупності треба визнати необґрунтованим. І навпаки, якщо на основі критерію значущості нульова гіпотеза приймається, тобто r міститься в допустимій зоні випадкового розсіяння, тоді немає підстави вважати сумнівним припущення відносно некорельованості змінних у генеральній сукупності.

При перевірці значущості встановлюють значення її рівня α, який дає певну впевненість в тому, що помилкові висновки будуть зроблені в дуже рідких випадках. Рівень значущості виражає ймовірність того, що нульова гіпотеза H_o відкидається тоді, коли вона в дійсності вірна. Зрозуміло, що має сенс вибрати дану ймовірність як можна меншою.

Перевіряючи значущість коефіцієнта парної кореляції, встановлюють наявність або відсутність кореляційного зв'язку між досліджуваними явищами. При відсутності зв'язку коефіцієнт кореляції генеральної сукупності рівний нулю (R=0). Процедура перевірки гіпотези починається з формулювання нульової та альтернативної гіпотез:

H_o: різниці між вибірковим коефіцієнтом кореляції r та R=0 немає;

H_1: різниця між r та R=0 значна, і як наслідок, між змінними y та x в генеральній сукупності є суттєвий лінійний зв'язок.

Для оцінки значущості коефіцієнта кореляції використовуємо t-критерій Стьюдента з n-m-1 ступенями вільності.

Під кількістю ступенів вільності розуміють різницю між кількістю спостережень та кількістю параметрів, які встановлені у результаті цих спостережень, незалежно один від одного.

За результатами вибірки обчислюємо t-статистику, або емпіричне значення параметру t:

$$t_{емп} = \frac{r\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad (1.25)$$

яке порівнюється з критичним значенням $t_{кр}$, що знаходиться за таблицями розподілу Стьюдента при заданому рівні значущості α та k=n-m-1 ступенях вільності.

Правило використання критерію полягає у наступному:

- якщо $|t_{емп}| > t_{кр}$, то нульова гіпотеза H_o на рівні значущості α відкидається і приймається альтернативна гіпотеза H_1 про існування лінійної залежності між даними змінними в генеральній сукупності;
- якщо $|t_{емп}| \le t_{кр}$, то нульова гіпотеза H_o на рівні значущості α приймається.

Перевірку нульових гіпотез стосовно параметрів α та β економетричної моделі проводять аналогічно. Спочатку висуваємо нульові гіпотези:

$$H_0: \alpha=0, \quad H_0: \beta=0.$$

Альтернативними будуть гіпотези:

$$H_1: \alpha \neq 0, \quad H_1: \beta \neq 0.$$

Потім обчислюємо емпіричні значення параметра t за формулами:

$$t_\beta = \frac{|\beta|}{\sigma_\beta}; \qquad t_\alpha = \frac{|\alpha|}{\sigma_\alpha}.$$

Емпіричне значення параметру порівнюють з критичним, знайденим за таблицями Стьюдента для заданого рівня значущості α та $k=n-m-1$ ступенів вільності. Якщо $t_{емп} > t_{кр}$, то нульова гіпотеза H_o із рівнем значущості α відкидається і приймається альтернативна гіпотеза H_1. Тоді відповідна оцінка вважається статистично значимою. Якщо ж $t_{емп} \le t_{кр}$, то нульова гіпотеза H_o для рівня значущості α приймається, а відповідна оцінка не є статистично значимою.

<u>Приклад 1.4.</u> На основі даних прикладів 1.1-1.3 виконати перевірки нульових гіпотез стосовно коефіцієнта кореляції і параметрів α та β економетричної моделі.

♦Розв'язування.

Висуваємо нульову гіпотезу H_o: $R_{ген}=0$ (робимо припущення, що коефіцієнт кореляції генеральної сукупності рівний нулю). Альтернативною гіпотезою буде H_1: $R_{ген}\neq 0$.

Далі для заданої вибірки обчислимо емпіричне значення параметру t:

$$t_{емп} = \frac{r\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}93\sqrt{10-1-1}}{\sqrt{1-0{,}87}} = 7{,}31$$

Для заданої ймовірності p=0,9 (α=1-p=1-0,9=0,1) і $k=10-1-1=8$ ступенів вільності знаходимо табличне значення $t_{кр.}=2{,}306$.

Оскільки $|t_{емп}| > t_{кр}$, то з надійністю p=0,9 гіпотезу H_o необхідно відкинути і прийняти альтернативну гіпотезу H_1 про існування залежності між змінними. Отже, у 90 % вибірок із генеральної сукупності коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю.

Далі виконаємо перевірку нульової гіпотези відносно β (H_o: β=0) проти альтернативної H_1: $\beta\neq 0$. Для цього знаходимо емпіричне значення за формулою:

$$t_{емп} = \frac{|b|}{\sigma_b} = \frac{1{,}13}{0{,}14} = 8{,}07$$

Оскільки емпіричне значення t більше критичного ($t_{емп}>t_{кр}$), то нульова гіпотеза відхиляється і робиться висновок, що кутовий коефіцієнт b розрахований за даною вибіркою є статистично значущим з ймовірністю p=0,9.

Перевіримо нульову гіпотезу H_o: α=0. Обчислимо

$$t_{емп} = \frac{|a|}{\sigma_a} = \frac{2{,}17}{0{,}69} = 3{,}14.$$

$t_{емп}>t_{кр}$, значить нульова гіпотеза стосовно параметру α теж відхиляється, а значить α не може бути рівним нулю в генеральній сукупності.

1.10. Адекватність економетричної моделі

Відповідність побудованої економетричної моделі можна перевірити з допомогою коефіцієнта детермінації. Якщо його значення близьке до одиниці, то можна вважати, що отримана економетрична модель адекватна. В цьому випадку зміна значення результативної змінної y лінійно залежить саме від зміни пояснюючої змінної x, а не через вплив випадкових факторів. Якщо ж значення коефіцієнта детермінації близьке до нуля, то модель вважають неадекватною, тобто лінійний зв'язок між y та x відсутній. Якщо ж значення коефіцієнта детермінації нечітке, тобто близьке 0,5, то для перевірки адекватності економетричної моделі використовують критерій Фішера F. Він дозволяє оцінити, чи значно нахил b відрізняється від нуля, тобто перевірити гіпотезу H_o: β=0, оскільки, якщо значення b близьке до нуля, то з формули (1.8) маємо:

$$\hat{y} = \bar{y} + b(x - \overline{x}) \approx \bar{y}$$

Іншими словами, як краще апроксимувати дані за середнім значенням, чи регресійною прямою.

Альтернативна гіпотеза полягає в тому, що значення параметру β не дорівнює нулю, і має вигляд: H_1: $\beta \neq 0$.

Обчислюємо емпіричне значення параметру F за формулою:

$$F_{емп} = \frac{r^2(n-m-1)}{m(1-r^2)}, \qquad (1.26)$$

де m – число незалежних змінних (для простої регресії m=1).

Після цього знаходимо з таблиці величину $F_{кр}$ – критичне значення F-розподілу Фішера з ($k_1=m=1$, $k_2=n-m-1$) ступенями вільності і рівнем значущості α. Наприклад, якщо α=0,05, то ми можемо помилятися в 5 % випадків, а в 95 % випадків наші висновки будуть правильними.

Якщо розраховане нами значення $F_{емп}>F_{кр}$, то ми відкидаємо гіпотезу про те, що β=0 з ризиком помилитися не більше ніж у 5 % випадків. У такому випадку побудована нами економетрична модель адекватна реальній дійсності.

В протилежному випадку, тобто якщо розраховане $F_{емп} \leq F_{кр}$, то гіпотезу про те, що β=0 приймаємо і в цьому випадку побудована нами економетрична модель неадекватна реальній дійсності.

Якщо ми отримали, що оціночне рівняння економетричної моделі відповідає реальній дійсності, то на його основі можна здійснювати прогноз, тобто передбачати шляхи розвитку досліджуваних явищ і процесів на найближче майбутнє. Прогноз може бути точковим або інтервальним.

Точковий прогноз на наступний n+1 період отримаємо, коли в оціночне рівняння економетричної моделі підставимо значення пояснюючої змінної x_{n+1}:

$$\hat{y}_{n+1} = a + bx_{n+1}.$$

Інтервальний прогноз – це інтервал, в який з заданою ймовірністю $p=1-\alpha$

попаде дійсне значення результативної змінної *y*. В загальному випадку він має вигляд:

$$\left(\hat{y}_{n+1} - t_\alpha \cdot \sigma_{yx} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}};\ \ \hat{y}_{n+1} + t_\alpha \cdot \sigma_{yx} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\right),$$

або

$$\left(a + bx_{n+1} - t_\alpha \cdot \sigma_{yx} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}};\ \ a + bx_{n+1} + t_\alpha \cdot \sigma_{yx} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

Нижню межу цього інтервалу називають песимістичним прогнозом, а верхню – оптимістичним.

<u>Приклад 1.5.</u> На основі даних попередніх прикладів перевірити на адекватність побудовану економетричну модель.

♦***Розв'язування.***

Для оцінки рівня адекватності побудованої економетричної моделі експериментальним даним використовуємо критерій Фішера *F*. Обчислимо:

$$F_{емп} = \frac{r^2(n - m - 1)}{m(1 - r^2)} = \frac{0{,}87 \cdot (10 - 1 - 1)}{1 \cdot (1 - 0{,}87)} = 53{,}54$$

Знайдемо табличне значення даного критерію ($F_{кр.}$) для рівня надійності p=0,95 та числа ступенів вільності $k_1=m=1$, $k_2=n-m-1=10-1-1=8$:

$$F_{кр} = 5{,}32.$$

Оскільки $F_{емп.} > F_{кр.}$, то отримане нами оціночне рівняння економетричної моделі

$$\hat{y} = 2{,}17 + 1{,}13\,x$$

адекватне реальній дійсності і на його основі можна здійснювати прогнози.

<u>Задача</u> *Торгівельне підприємство має велику кількість філій і його керівництво вивчає питання про залежність Y (річний товарообіг однієї філії, млн. грн.) від x (торгівельної площі, тис. м^2). Для десяти філій за певний рік зафіксовані такі значення показників Y і x:*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,5	2,9	3,1	3,2	4,3	5,7	5,8	7	7,2	7,5
x_i	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	1	1,1	1,2	1,3	1,4

На обсяг товарообігу впливають такі чинники: середньоденна інтенсивність потоку покупців, об'єм основних фондів, їх структура, середньоспискова чисельність працівників, площа підсобних приміщень тощо. Припускається, що в досліджуваній групі філій значення цих чинників приблизно однакові, тому вплив відмінностей їх значень на зміну обсягу товарообігу є незначним.

Вважаючи, що виконуються передумови 1-4*, потрібно:*

1) знайти статистичні оцінки параметрів лінійного рівняння регресії;

2) точкову оцінку та довірчий інтервал дисперсії збурень із надійністю $\gamma = 0{,}9$;

3) для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити значущість коефіцієнтів регресії α_0 та α_1;

4) знайти довірчі інтервали коефіцієнтів регресії з надійністю $\gamma = 0{,}95$;

5) знайти вибіркові коефіцієнт детермінації, коефіцієнт кореляції, а також інші показники якості лінійної регресії (MAPE, MPE);

6) знайти та побудувати довірчу зону функції регресії з надійністю $\gamma = 0{,}95$;

7) знайти прогнозне значення річного товарообігу для нової філії, торгівельна площа якої складає 1,8 тис. м^2, а також із надійністю $\gamma = 0{,}95$ побудувати довірчий інтервал для цього прогнозного значення.

○ **1)** Статистичні оцінки a_0, a_1 параметрів α_0 та α_1 лінійного рівняння регресії задовільняють системі нормальних рівнянь (2.12):

$$\begin{cases} a_0 + \overline{x}a_1 = \overline{y}, \\ \overline{x}a_0 + \overline{x^2}a_1 = \overline{xy}. \end{cases}$$

Для знаходження коефіцієнтів цієї системи складемо розрахункову табл. 2.1, останній стовпець якої потрібний для обчислення σ_y.

Таблиця 2.1

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\, y_i$	y_i^2
1	0,2	1,5	0,04	0,3	2,25
2	0,3	2,9	0,09	0,87	8,41
3	0,5	3,1	0,25	1,55	9,61
4	0,6	3,2	0,36	1,92	10,24
5	0,8	4,3	0,64	3,44	18,49
6	1	5,7	1	5,7	32,49
7	1,1	5,8	1,21	6,38	33,64
8	1,2	7	1,44	8,4	49
9	1,3	7,2	1,69	9,36	51,84
10	1,4	7,5	1,96	10,5	56,25
Σ	8,4	48,2	8,68	48,42	272,22

Використовуючи нижній рядок табл. 2.1, отримаємо (обсяг вибірки $n = 10$):

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{10} x_i / n = 8{,}4/10 = 0{,}84; \qquad \overline{y} = \sum_{i=1}^{10} y_i / n = 48{,}2/10 = 4{,}82;$$

$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 / n = 8{,}68/10 = 0{,}868; \qquad \overline{xy} = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i / n = 48{,}42/10 = 4{,}842;$$

$$\overline{y^2} = \sum_{i=1}^{10} y_i^2 / n = 272{,}22/10 = 27{,}222;$$

$$\begin{cases} a_0 + 0{,}84 a_1 = 4{,}82, \\ 0{,}84 a_0 + 0{,}868 a_1 = 4{,}842. \end{cases}$$

Єдиний розв’язок цієї системи рівнянь згідно із формулами (2.13):

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \frac{4{,}842 - 0{,}84 \cdot 4{,}82}{0{,}868 - (0{,}84)^2} = \frac{0{,}7932}{0{,}1624} = 4{,}884,$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x} = 4{,}82 - 0{,}84 \cdot 4{,}884 = 0{,}717.$$

Отже, емпіричне рівняння регресії має такий вигляд:

$$\hat{y} = 0{,}717 + 4{,}884x. \qquad (2.57)$$

2) Незміщену точкову оцінку S_u^2 невідомої дисперсії збурень σ_u^2 знайдемо за формулою (2.22):

$$S_u^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2,$$

попередньо обчисливши $\hat{y}_i = 0{,}717 + 4{,}884 x_i$ та $u_i^2 = \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$, $i = \overline{1{,}10}$, (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
y_i	1,5	2,9	3,1	3,2	4,3	5,7	5,8	7	7,2	7,5	–
$\hat{y}_i$	1,6938	2,1822	3,159	3,6474	4,6242	5,601	6,0894	6,5778	7,0662	7,5546	–
u_i	-0,1938	0,7178	-0,059	-0,4474	-0,3242	0,099	-0,2894	0,4222	0,1338	-0,0546	0,0044
u_i^2	0,0376	0,5152	0,0035	0,2002	0,1051	0,0098	0,0838	0,1783	0,0179	0,003	1,1544

<u>Зауваження</u>. *Згідно із (2.21):* $\overline{u} = 0$, *в той час як у нашому випадку* $\sum u_i / 10 = 0{,}00044$. *Цим значенням можна ігнорувати (вважати практично рівним нулю). Разом з тим з'ясуємо причину такого відхилення від нуля. Значення* a_1 *та* a_0 *з точністю до шести знаків після коми відповідно складають* 4,884236 *та* 0,717242*, тобто обидва ці значення (хай і несуттєво) більші тих, які взяті у моделі (2.57). Накопичення додатних похибок у різницях* $y_i - \hat{y}_i$ *і привело до того, що* $\sum(y_i - \hat{y}_i)$ *незначно перевищує нуль. Відмітимо також, що значення* $a_1 = 4{,}88$, $a_0 = 0{,}72$ *приводять до рівності* $\sum u_i = 0{,}008$.

Використавши підсумок останнього рядка, отримаємо:

$$S_u^2 = \frac{1}{10-2} \cdot 1{,}1544 = 0{,}1443.$$

Ліва і права межі довірчого інтервалу для σ_u^2 визначаються згідно (2.29) за формулами відповідно $\frac{(n-2)S_u^2}{\chi_2^2}$ і $\frac{(n-2)S_u^2}{\chi_1^2}$, де у відповідності із (2.26) та (2.27) χ_1^2 та χ_2^2 є коренями рівнянь

$$P\left(\chi^2(k) > \chi_1^2(p;k)\right) = p, \quad p = (1+\gamma)/2 = 0{,}95,$$
$$P\left(\chi^2(k) > \chi_2^2(p;k)\right) = p, \quad p = (1-\gamma)/2 = 0{,}05.$$

За табл. 4 додатків для $k = n - 2 = 8$ знайдемо: $\chi_1^2(0{,}95;8) = 2{,}73$ і $\chi_2^2(0{,}05;8) = 15{,}51$. Тоді ліва межа довірчого інтервалу дорівнює $\frac{8 \cdot 0{,}1443}{15{,}51} = 0{,}0744$, а права – $\frac{8 \cdot 0{,}1443}{2{,}73} = 0{,}4229$. Тобто остаточно з надійністю 0,9

$$0{,}0744 < \sigma_u^2 < 0{,}4229.$$

3) Згідно з п.8, якщо виконується нерівність (2.33): $\left|\frac{a_m}{S_{a_m}}\right| > t_{кр.}$ $(m=0, m=1)$, тоді на рівні значущості α приймається гіпотеза $H_1 : a_m \neq 0$. Значення S_{a_0} та S_{a_1} знайдемо із виразів (2.30):

Знайдемо дисперсію *x*:

$$\sigma_x{}^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 0,868 - \left(0,84\right)^2 = 0,162$$

Звідки

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x{}^2} = \sqrt{0,162} = 0,403 .$$

Отже,

$$S_{a_0} = \sqrt{\frac{S_u^2 \overline{x^2}}{n\sigma_x^2}} = \frac{S_u}{\sigma_x}\sqrt{\frac{\overline{x^2}}{n}} = \frac{0,1443}{0,403}\sqrt{\frac{\overline{x^2}}{10}} = 0,1443\sqrt{\frac{0,868}{10}} = 0,1055 ;$$

$$S_{a_1} = \sqrt{\frac{S_u^2}{n\sigma_x^2}} = \frac{S_u}{\sigma_x\sqrt{n}} = \frac{0,1443}{0,403\sqrt{10}} = 0,1132 .$$

Тоді спостережені значення критерію:

$$\left|\frac{a_0}{S_{a_0}}\right| = \frac{0,717}{0,1055} = 6,796 , \quad \left|\frac{a_1}{S_{a_1}}\right| = \frac{4,884}{0,1132} = 43,145 .$$

Критична точка для двосторонньої критичної області $t_{кр.} = t_{двост.}(\alpha, k)$ при значеннях $\alpha = 0,05$, $k = n - 2 = 8$ знаходиться за верхньою частиною табл. 3 додатків: $t_{кр.} = 2,306$.

Оскільки $6,796 > t_{кр.} = 2,306$ і $43,145 > t_{кр.} = 2,306$, то на рівні значущості $\alpha = 0,05$ робимо висновки, що $\alpha_0 \neq 0$ і $\alpha_1 \neq 0$.

4) Згідно з (2.39) та (2.40) довірчі інтервали з надійністю γ для невідомих параметрів регресії a_0 та a_1 мають такий вигляд:

$$a_m - t_m(\gamma, k)S_{a_m} < \alpha_m < a_m + t_m(\gamma, k)S_{a_m} ,$$

де $m = 0,1$, $t_m = t_m(\gamma, k)$ – корінь рівняння $P(|t_m| < t) = \gamma$, t_0 та t_1 – випадкові величини, розподілені за законом Ст'юдента.

У нашому випадку $\gamma = 0{,}95$, число ступенів вільності $k = n - 2 = 8$. За табл. 2 додатків знаходимо $t_0(0{,}95;8) = t_1(0{,}95;8) = 2{,}306$. Тоді з врахуванням знайдених значень $S_{a_0} = 0{,}1055$, $S_{a_1} = 0{,}1132$ отримаємо:

$$0{,}717 - 2{,}306 \cdot 0{,}1055 < \alpha_0 < 0{,}717 + 2{,}306 \cdot 0{,}1055,$$

$$4{,}884 - 2{,}306 \cdot 0{,}1132 < \alpha_1 < 4{,}884 + 2{,}306 \cdot 0{,}1132$$

або остаточно

$$0{,}4737 < \alpha_0 < 0{,}9603,$$

$$4{,}6236 < \alpha_1 < 5{,}145.$$

5) Коефіцієнт детермінації R^2 знайдемо за формулою (2.46*):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2}{n\sigma_y^2}.$$

Із табл. 2.2 (останнє число нижнього рядка) $\sum_{i=1}^{10} u_i^2 = \sum_{i=1}^{10} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = 1{,}1544$.

Для знаходження $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2$ використаємо табл. 2.1:

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2} = \sqrt{272{,}22/10 - \left(48{,}2/10\right)^2} = 1{,}9974.$$

Отже,

$$R^2 = 1 - \frac{1{,}1544}{10 \cdot 1{,}9974} = 0{,}9422.$$

Таким чином, варіація залежної змінної Y на 94,22% пояснюється варіацією пояснюючої змінної.

Вибірковий коефіцієнт кореляції згідно із (2.46):

$$r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0{,}9422} = 0{,}9707.$$

При цьому додатний знак цього числа обрано в зв'язку з тим, що $a_1 > 0$.

Обчислимо абсолютну середню відсоткову помилку MAPE за формулою (2.49):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \right| \cdot 100\%.$$

Для цього використаємо другий і четвертий рядки табл. 2.2:

$$\sum_{i=1}^{10} \left| \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \right| = \frac{0{,}1938}{1{,}5} + \frac{0{,}7178}{2{,}9} + \frac{0{,}059}{3{,}1} + \frac{0{,}4474}{3{,}2} + \frac{0{,}3242}{4{,}3} + \frac{0{,}099}{5{,}7} +$$

$$+\frac{0,2894}{5,8}+\frac{0,4222}{7}+\frac{0,1338}{7,2}+\frac{0,0546}{7,5}=0,1292+0,2475+0,019+0,1398+$$
$$+0,0754+0,0174+0,0499+0,0603+0,0186+0,0073=0,7644.$$

Отже, $MAPE=\frac{1}{10}\cdot 0,7644\cdot 100\%=7,644\%<10\%$, тобто відповідає високій точності прогнозу за моделлю.

Середню відсоткову помилку MPE знайдемо за формулою (2.50):

$$MPE=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{y}_i-y_i}{y_i}\cdot 100\%,$$

використавши розрахунки при обчисленні MAPE:

$$\sum_{i=1}^{10}\frac{\hat{y}_i-y_i}{y_i}=0,1292-0,2475+0,019+0,1398++0,0754-0,0174+$$
$$+0,0499-0,0603-0,0186+0,0073=0,0768.$$

Остаточно

$$MPE=\frac{1}{10}\cdot 0,0768\cdot 100\%=0,768\%<5\%.$$

<u>Висновок</u>: *всі знайдені показники вказують на високу якість моделі.*

6) Побудова довірчої зони для функції регресії передбачає побудову точок з координатами $\{x_i;\hat{y}_i-t(\gamma,n-2)S_{\hat{y}_i}\}$, $i=\overline{1,n}$, з наступним з'єднанням сусідніх (по індексу i) точок прямолінійними відрізками, а потім здійснення аналогічної процедури для послідовності точок $\{x_i;\hat{y}_i+t(\gamma,n-2)S_{\hat{y}_i}\}$.

Величину $S_{\hat{y}_i}$ знайдемо із формули (2.36) $S_{\hat{y}_i}=S_u\sqrt{\left[1+\frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}\right]\frac{1}{n}}$.

Використовуючи табл. 2.1 і знайдене значення $S_u=\sqrt{0,1443}=0,3799$, отримаємо:

$$\sigma_x^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2=0,1624;$$

$$S_{\hat{y}_1}=0,3799\sqrt{\left[1+\frac{(0,2-0,84)^2}{0,1624}\right]\frac{1}{10}}=0,2255;$$

$$S_{\hat{y}_2}=0,3799\sqrt{\left[1+\frac{(0,3-0,84)^2}{0,1624}\right]\frac{1}{10}}=0,201;$$

$S_{\hat{y}_3} = 0{,}1572$; $S_{\hat{y}_4} = 0{,}1398$; $S_{\hat{y}_5} = 0{,}1207$; $S_{\hat{y}_6} = 0{,}1293$;

$S_{\hat{y}_7} = 0{,}143$; $S_{\hat{y}_8} = 0{,}1611$; $S_{\hat{y}_9} = 0{,}1823$; $S_{\hat{y}_{10}} = 0{,}2057$.

За табл. 2 додатків знайдемо $t(0{,}95;8) = 2{,}306$. Використовуючи табл. 2.2 і знайдені $S_{\hat{y}_i}$, отримаємо ординати точок нижньої межі довірчої зони:

$y_1 - tS_{\hat{y}_1} = 1{,}6938 - 2{,}306 \cdot 0{,}2255 = 1{,}1738$;

$y_2 - tS_{\hat{y}_2} = 2{,}1822 - 2{,}306 \cdot 0{,}201 = 1{,}7187$;

$y_3 - tS_{\hat{y}_3} = 3{,}159 - 2{,}306 \cdot 0{,}1572 = 2{,}7965$;

$y_4 - tS_{\hat{y}_4} = 3{,}6474 - 2{,}306 \cdot 0{,}1394 = 3{,}3259$;

$y_5 - tS_{\hat{y}_5} = 4{,}6242 - 2{,}306 \cdot 0{,}1207 = 4{,}3459$

$y_6 - tS_{\hat{y}_6} = 5{,}601 - 2{,}306 \cdot 0{,}1293 = 5{,}3028$;

$y_7 - tS_{\hat{y}_7} = 6{,}0894 - 2{,}306 \cdot 0{,}143 = 5{,}7596$;

$y_8 - tS_{\hat{y}_8} = 6{,}5778 - 2{,}306 \cdot 0{,}1611 = 6{,}2063$;

$y_9 - tS_{\hat{y}_9} = 7{,}0662 - 2{,}306 \cdot 0{,}1823 = 6{,}6458$;

$y_{10} - tS_{\hat{y}_{10}} = 7{,}5546 - 2{,}306 \cdot 0{,}2057 = 7{,}0803$.

Тоді ординати точок верхньої межі довірчої зони набирають таких значень:

$\hat{y}_1 + tS_{\hat{y}_1} = 1{,}6938 + 2{,}306 \cdot 0{,}2255 = 2{,}2139$;

$\hat{y}_2 + tS_{\hat{y}_2} = 2{,}1822 + 2{,}306 \cdot 0{,}201 = 2{,}6457$;

$\hat{y}_3 + tS_{\hat{y}_3} = 3{,}159 + 2{,}306 \cdot 0{,}1572 = 3{,}5215$;

$\hat{y}_4 + tS_{\hat{y}_4} = 3{,}6474 + 2{,}306 \cdot 0{,}1394 = 3{,}9689$;

$\hat{y}_5 + tS_{\hat{y}_5} = 4{,}6242 + 2{,}306 \cdot 0{,}1207 = 4{,}9025$

$\hat{y}_6 + tS_{\hat{y}_6} = 5{,}601 + 2{,}306 \cdot 0{,}1293 = 5{,}8992$;

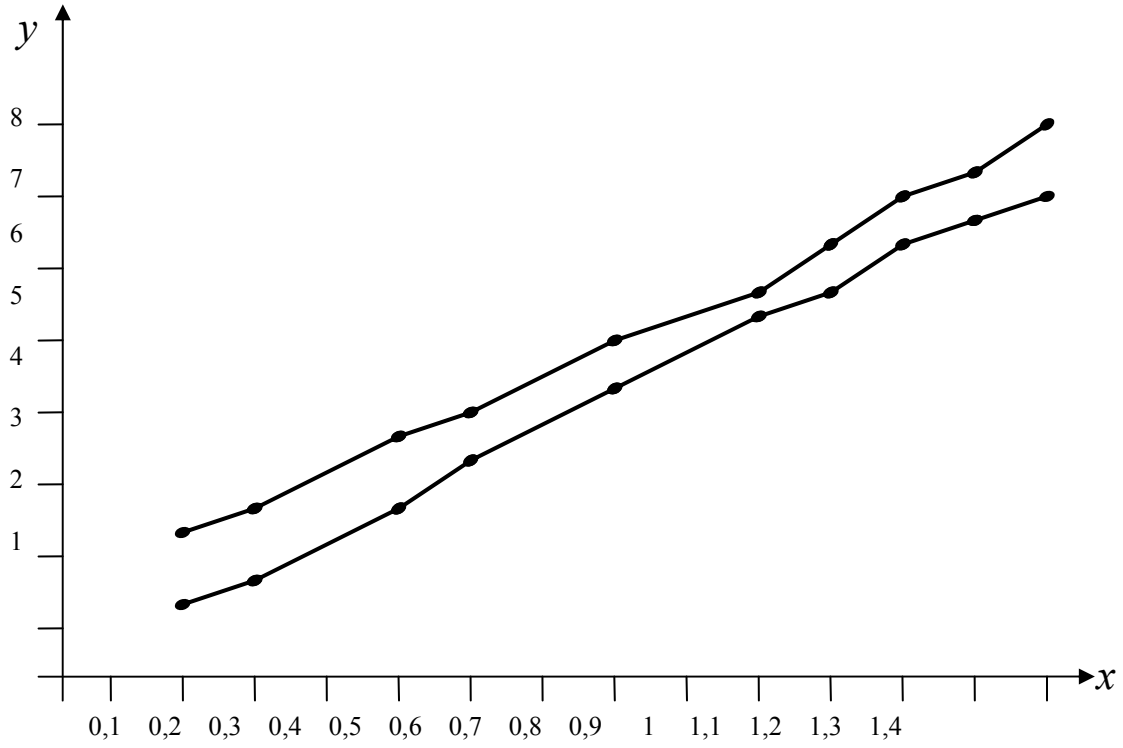
$\hat{y}_7 + tS_{\hat{y}_7} = 6{,}0894 + 2{,}306 \cdot 0{,}143 = 6{,}4192$;

$\hat{y}_8 + tS_{\hat{y}_8} = 6{,}5778 + 2{,}306 \cdot 0{,}1611 = 6{,}9493$;

$\hat{y}_9 + tS_{\hat{y}_9} = 7{,}0662 + 2{,}306 \cdot 0{,}1823 = 7{,}4866$;

$\hat{y}_{10} + tS_{\hat{y}_{10}} = 7{,}5546 + 2{,}306 \cdot 0{,}2057 = 8{,}1263$.

Довірча зона (з надійністю 0,95) для функції регресії зображена на мал. 2.2.



Малюнок 2.2.

7) Прогнозне значення річного товарообігу для нової філії із торгівельною площею 1,8 тис. м^2 знайдемо із рівняння (2.57):

$$\hat{y}_{n+1} = 0{,}717 + 4{,}884 \cdot 1{,}8 = 9{,}508.$$

Довірчий інтервал для прогнозного значення y_{n+1} із надійністю $\gamma = 0{,}95$ визначається (2.56). З допомогою виразу (2.55) знайдемо

$$S_{u_{n+1}} = S_u \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{n+1} - \overline{x}\right)^2}{n\sigma_x^2}} = 0{,}3799\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(1{,}8 - 0{,}84)^2}{10 \cdot 0{,}1624}} = 0{,}4906.$$

Тоді шуканий довірчий інтервал має вид

$$9{,}508 - 2{,}306 \cdot 0{,}4906 < y_{n+1} < 9{,}508 + 2{,}306 \cdot 0{,}4906$$

або остаточно

$$8{,}3767 < y_{n+1} < 10{,}6393.$$

◎

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Соті долі *x*									
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37285	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	44352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49835	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	48881	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	40085	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

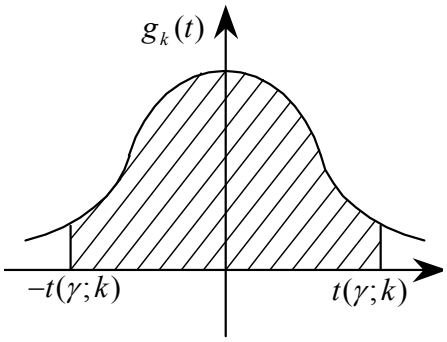
x	Десяті долі *x*				
	0	*2*	*4*	*6*	*8*
4,	0,4999683	4999867	4999946	4999979	4999992
5,	4999997				

Таблиця 2

Значення $t = t(\gamma; k)$,
що задовільняють рівнянню

$$P\left(|T| < t \right) = 2\int_0^t g_k(t)dt = \gamma,$$

де $g_k(t)$ – густина **розподілу Ст'юдента (*t*-розподілу)**, $k = n - 1$ – число ступенів вільності



$k = n - 1$	γ				
	0,9	*0,95*	*0,98*	*0,99*	*0,999*
1	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	2,920	4,303	6,965	9,925	31,599
3	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,969
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	1,708	2,060	2,485	2,785	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
50	1,676	2,009	2,403	2,678	3,496
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,667	1,994	2,381	2,648	3,435
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,402
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,390
120	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Таблиця 3

Критичні точки розподілу Ст'юдента (*t*-розподілу)

Для двосторонньої критичної області критична точка $t_{двост.кр}(\alpha;k)=t_\alpha$ є коренем рівняння $\int_0^{t_\alpha} g_k(t)dt=(1-\alpha)/2$; для односторонньої (правосторонньої) критичної області точка $t_{правост.кр}(\alpha;k)=t_{2\alpha}$ є коренем рівняння $\int_{t_{2\alpha}}^{\infty} g_k(t)dt=(1-2\alpha)/2$, де $g_k(t)$ – густина розподілу Ст'юдента, $k=n-1$ – число ступенів вільності. Для лівосторонньої критичної області $t_{лівост.кр}(\alpha;k)=-t_{2\alpha}$.

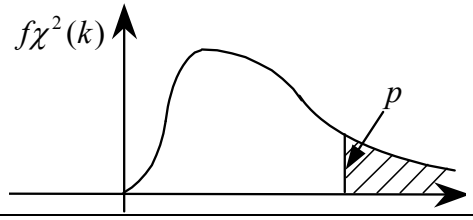
Число ступенів вільності $k=n-1$	Рівень значущості α (**двостороння** критична область)					
	0,10	*0,05*	*0,02*	*0,01*	*0,002*	*0,001*
1	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	637,0
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,562	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	1,658	1,981	2,362	2,624	3,172	3,374
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291
Число ступенів вільності $k=n-1$	*0,05*	*0,025*	*0,01*	*0,005*	*0,001*	*0,0005*
	Рівень значущості α (**одностороння** критична область)					

Таблиця 4

Значення

$$P\left(\ \chi^2(k) > \chi^2(p;k)\right) = p,$$

де k – число ступенів вільності



k	p							
	0,999	*0,99*	*0,95*	*0,90*	*0,10*	*0,05*	*0,01*	*0,001*
1	$0{,}157\cdot10^{-5}$	0,0002	0,004	0,02	2,71	3,84	6,63	10,83
2	0,002	0,02	0,10	0,21	4,61	5,99	9,21	13,82
3	0,02	0,12	0,35	0,58	6,25	7,82	11,34	16,27
4	0,09	0,30	0,71	1,06	7,78	9,49	13,28	18,47
5	0,21	0,55	1,15	1,61	9,24	11,07	15,08	20,51
6	0,38	0,87	1,64	2,20	10,65	12,59	16,81	22,46
7	0,60	1,24	2,17	2,83	12,02	14,06	18,48	24,32
8	0,86	1,65	2,73	3,49	13,36	15,51	20,09	26,12
9	1,15	2,09	3,33	4,17	14,68	16,92	21,67	27,88
10	1,48	2,56	3,94	4,87	15,99	18,31	23,21	29,59
11	1,83	3,05	4,58	5,58	17,28	19,68	24,72	31,26
12	2,21	3,57	5,23	6,30	18,55	21,03	26,22	32,91
13	2,62	4,11	5,89	7,04	19,81	22,36	27,69	34,53
14	3,04	4,66	6,57	7,79	21,06	23,69	29,14	36,12
15	3,48	5,23	7,26	8,55	22,31	25,00	30,58	37,70
16	3,94	5,81	7,96	9,31	23,54	26,30	32,00	39,25
17	4,42	6,41	8,67	10,09	24,77	27,59	33,41	40,79
18	4,90	7,02	9,39	10,86	25,99	28,87	34,81	42,31
19	5,41	7,63	10,12	11,65	27,20	30,14	36,19	43,82
20	5,92	8,26	10,85	12,44	28,41	31,41	37,57	45,31
21	6,45	8,90	11,59	13,24	29,62	32,67	38,93	46,80
22	6,98	9,54	12,34	14,04	30,81	33,92	40,29	48,27
23	7,53	10,20	13,20	14,85	32,01	35,17	41,64	49,73
24	8,08	10,86	13,85	15,66	33,19	36,42	43,98	51,18
25	8,65	11,52	14,61	16,47	34,38	37,65	44,31	52,62
26	9,22	12,20	15,37	17,29	35,56	38,89	45,64	54,05
27	9,80	12,88	16,15	18,11	36,74	40,11	46,96	55,48
28	10,39	13,56	16,93	18,94	37,92	41,34	48,28	56,89
29	10,99	14,26	17,71	19,77	39,09	42,56	49,59	58,30
30	11,59	14,95	18,49	20,60	40,26	43,77	50,89	59,70
40	17,92	22,16	26,51	29,05	51,81	55,76	63,69	73,40
50	24,67	29,71	34,76	37,69	63,17	67,51	76,15	86,66
100	61,92	70,07	77,93	82,36	118,50	124,34	135,81	149,45

Таблиця 5

Критичні точки $F_{кр}(\alpha; k_1, k_2)$ **розподілу Фішера-Снедокора**,

що задовільняють рівнянню $P\left[\ F > F_{кр}(\alpha; k_1, k_2)\right] = \alpha$ при $\alpha = 0{,}05$

k_2	k_1									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*8*	*12*	*24*	∞
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	238,88	243,91	249,05	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3.52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2.49	2,34	2.16	1,96	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Модуль 3 — «*Економічний ризик і методи його вимірювання*»

1. Поняття ризику.

Ризик, як історична категорія виник на зорі цивілізації – тоді коли у людини з'явилось усвідомлення щодо виникнення несприятливих ситуацій.

Більшість істориків стверджують, що в XVI-XVII століттях, в епоху великих географічних відкриттів і морських подорожей, прибутки від торгівельних операцій були величезними і прямо пропорційними ступеню ризику.

Наукові уявлення щодо ризику складалися поетапно. Це явище почали вивчати статистики, економісти, юристи, математики.

Вперше наукове, математичне визначення поняття "ризик" було сформульоване понад 200 років тому німецьким математиком Йоганном Ніколаусом Тетенсом (1736-1807) у праці "Вступ до розрахунку життєвої ренти і право її отримання", виданій ще у 1786р. в Лейпцигу. Цим він започаткував основи нового напряму – ризикології науки про ризик в економіці, яка знайшла практичне застосування в багатьох сферах економіки. Пізніше теорія проблеми ризику почала розроблятися в рамках класичних ідей Мілля і Сеньора. Вони визначали в структурі прибутку підприємця відсоток ризику як частку на вкладений капітал, заробітну плату капіталіста і плату за ризик, як відшкодування можливих збитків, пов'язаних з підприємницькою діяльністю. Неокласик Альфред Маршал розклав прибуток подібно до класиків, на заробітну плату керівникам, відсоток на капітал і плату за ризик. Теорію ризику Джон Мейнард Кейнс розглядає, як частку вартості пов'язану з можливими витратами які виникають через непередбачувані зміни.

Нове трактування ризику запропонував американський економіст Френк Найт. Він розглядає ризик не просто як матеріальний збиток, а як наслідок невизначеності прибутку, що і поклало основу сучасної теорії фінансового ризику, яку використали відомі західні економісти Маркевич і Шарпе.

За останні роки з'явилось ряд робіт з теорії ризику вітчизняних і зарубіжних економістів, зокрема О.Альгіна, І.Балабанова, І.Бланка, В.Вітлінського і інших.

Теоретичні дослідження і практика переконують. Що ризик досить широке поняття. Специфічний предмет наукового дослідження, що має свій статус. Щоб дати обґрунтоване визначення ризику спочатку необхідно з'ясувати що він являє собою у фінансово-економічній сфері. Вивчаючи та враховуючи ризик необхідно мати чітке уявлення про його об'єкт, суб'єкт, джерела. Формулюючи його визначення, необхідно звернути увагу на те що ризик має діалектичну об'єктивно-суб'єктивну структуру.

Об'єктивність ризику у фінансово-економічній сфері ґрунтується на тому. що він існує через об'єктивні, притаманні економіці категорії

конфліктності, невизначеності, розпливчастості, відсутності вичерпної інформації на момент оцінювання та прийняття управлінських рішень.

Суб'єктивність ризику зумовлюється тим, що в економіці діють реальні люди зі своїм досвідом, психологією, інтересами, смаками, схильністю чи не схильністю до ризику.

Слід виділити основні постулати стосовно ризику:

- всеосяжність ризику;
- ризиком обтяжені передбачення, прогнози;
- ризик виникає в процесах оцінювання;
- ризик необхідно кількісно вимірювати і оцінювати;
- структура та міра ризику діалектично змінюється в часі під впливом змін зовнішнього та внутрішнього середовища, дії низки об'єктивних і суб'єктивних чинників.
- вимірювання ризику ґрунтується на загально-методологічних положеннях теорії вимірювання, яка складає фундамент будь-яких вимірювань.

На основі викладених постулатів дамо визначення ризику.

Ризик-це діяльність, пов'язана з подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, у процесі якого є можливість кількісно і якісно визначити імовірність досягнення передбачуваного результату, невдачі і відхилення від мети.

Ризик можна розуміти: як стан і як дію.

Як стан – це нестабільність, невизначеність, невпевненість у майбутньому.

Ризик як дія – це поведінка суб'єкта в умовах нестабільності.

Ми можемо приймати рішення, що зменшують ризик, але повністю виключити економічний ризик неможливо. Отже, економічна діяльність в умовах ринку без ризику неможлива. При цьому стоїть основне завдання керувати ризиком, зведення його до мінімуму.

Важливим етапом дослідження і вивчення ризику є розробка методик, розробка механізму контролю та керування економічним ризиком. Ці дослідження базуються на принципах системного аналізу.

Системний аналіз – це методологія дослідження об'єктів з метою визначення найбільш ефективних методів керування ними.

Елементами ризику є: об'єкт, суб'єкт, джерело.

Об'єктом ризику називають економічну систему, оцінити ефективність та умови функціонування котрої на перспективу у вичерпній повноті та з необхідною точністю неможливо.

Суб'єктом ризику – особа або колектив, які заінтересовані в результатах управління об'єктом ризику і мають відповідну компетенцію щодо такого управління та прийняття відповідних рішень стосовно об'єкта ризику.

Джерела ризику – це процеси і явища, які спричиняють невизначеність, конфліктність.

2.Сутність ризику.

2.1 Сутність ризику і його функції.

Сутність ризику полягає в:

- можливості відхилення від передбачуваної мети, заради якої здійснюється обрана альтернатива;
- імовірність досягнення бажаного результату;
- відсутність впевненості в досягненні поставленої мети;
- можливість матеріальних, моральних та інших втрат, пов'язаних з обраною в умовах невизначеності альтернативою.

Функції ризику:

- інноваційна - стимулює пошук нетрадиційних розв'язань проблем, які стоять перед підприємцем;
- регулятивна – має суперечливий характер і виступає в двох формах: конструктивна, неконструктивна.
- захисна – виявляється в тому, що якщо для підприємця ризик – природний стан, то нормальним повинно бути і терпиме ставлення до невдач;
- аналітична – передбачає можливість вибору з декількох альтернатив найбільш рентабельні і найменш ризиковані рішення.

2.2 Класифікація ризиків.

Тенденція до ускладнення соціально-економічних процесів породжує появу все нових видів і типів ризику. Розрізняють два ти ризику: динамічний і статистичний.

Динамічний – це ризик, пов'язаний з непередбачуваними змінами вартості основного капіталу внаслідок прийняття управлінських рішень.

Статистичний – це ризик, пов'язаний із скороченням реальних активів внаслідок втрати частки власності, а також скороченням доходу через недієздатність організації.

У процесі своєї діяльності підприємці зіштовхуються із сукупністю різних видів ризиків, які відрізняються між собою за місцем виникнення, сукупністю зовнішніх і внутрішніх факторів, що вливають на їх рівень. Всі ризики взаємозалежні. Розглянемо загальну класифікацію ризиків.

За характером обліку ризики бувають:

Зовнішні – пов'язані зі спричиненням збитків і неотриманням підприємцем очікуваного прибутку внаслідок порушення своїх зобов'язань контрагентами підприємця або через інші обставини, які не залежать від нього.

Зовнішні ризики поділяють на :

- природні (ризик стихійних лих і екологічні ризики);
- загальноекономічні (ризик зміни економічної ситуації, ризик несприятливої кон'юнктури ринку, податкові ризики, ризик посилення конкуренції і галузевий ризик);

- політичні (ризик націоналізації й експропріації, ризик розриву контракту, ризик військових дій і цивільних заворушень);
- фінансові ризики, пов’язанні з купівельною спроможністю грошей;

Внутрішні залежать від здатності підприємця організовувати виробництво і збут продукції, або це діяльність самого підприємства і його контрактної аудиторії.

До внутрішніх ризиків належать:

- виробничі (ризики зниження продуктивності праці, втрати робочого часу, перевитрати або відсутність матеріалів);
- технічні (ризики при впровадження нових технологій, або збоїв і виходу з ладу устаткування);
- комерційні
- інвестиційні.

В залежності від можливого результату ризики можна розділити на дві великі групи: чисті і спекулятивні.

Чисті ризики означають можливість одержання негативного чи нульового результату. До них належать: природні (пов’язані з проявом стихійних сил природи), екологічні (пов’язані із забрудненням навколишнього середовища), політичні (пов’язані з політичною ситуацією і країні і діяльністю держави), транспортні (зв’язані з перевезеннями вантажів транспортом) і частина комерційних ризиків.

Спекулятивні ризики полягають у можливості одержання як позитивного, так і негативного результату. До них належать фінансові ризики, які є частиною комерційних ризиків.

Класифікація комерційних ризиків.

Комерційні ризики означають небезпеку втрат у процесі фінансово – господарської діяльності. За структурною ознакою розрізняють:

Фінансові – це ризики, пов’язані зі збитками від зупинки виробництва, або від впровадження нових технологій.

Торгові – це ризики. Пов’язані зі збитками через затримку платежів, відмову від платежу в період транспортування товару, недопоставки товару тощо.

Фінансові ризики пов’язані з імовірністю втрат фінансових ресурсів.

Розглянемо ризики пов’язані з купівельною спроможністю грошей.

Інфляційний – при зростанні інфляції одержувані грошові доходи знецінюються з точки зору реальної купівельної спроможності швидше ніж зростають.

Дефляційний - при зростанні дефляції відбувається падіння рівня цін, погіршення економічних умов підприємництва і зниження доходів.

Валютний – небезпека валютних втрат внаслідок зміни курсу однієї іноземної валюти відносно іншої при проведенні зовнішньоекономічних операцій.

Ризик ліквідності – пов'язаний з можливістю втрат при реалізації цінних паперів, товарів, або через зміну оцінки їхньої споживчої вартості.

Інвестиційний –втрати при вкладання грошей в проекти. Інвестиційні ризики поділяють на:

- ризик втраченої вигоди – це ризик настання побічних фінансових збитків у результаті нездійснення будь-якого заходу;
- ризик зниження прибутковості – це ризик, який може виникнути в результаті зменшення розміру відсотків і дивідендів з портфельних інвестицій, з внесків і кредитів.

Ризик зниження прибутковості містить в собі такі різновиди:

Процентний – втрати пов'язані з підвищенням чи зниженням відсоткової ставки.

Кредитний – небезпека несплати позичальником основного боргу і відсотків, які належати кредитору.

2.3 Види ризиків.

Вид ризику визначається видом економічної діяльності.

Країнові ризики виникають при здійснені підприємцями й інвесторами своєї діяльності на території іноземних держав.

Політичний ризик – можливість виникнення збитків у зв'язку з можливими змінами в курсі політики уряду, зміни законодавства.

Технічний ризик визначається ступенем організації виробництва, заходами безпеки, можливістю проведення ремонту устаткування.

Страховий ризик – це ризик, який може бути оцінений з точки зору імовірності настання страхового випадку і кількісних розмірів можливих збитків.

Підприємницький – це ризик який виникає при будь-яких видах діяльності, пов'язаний з виробництвом продукції, товарів, послуг, комерцією, фінансовими операціями, здійсненням різних проектів.

Господарський - ризик пов'язаний з господарською діяльністю, орієнтованою на одержання прибутку на основі задоволення потреб і запитів покупців відповідно до вимог ринку.

Комерційний - ризик пов'язаний з комерційною діяльністю.

Фінансовий - ризик пов'язаний з фінансовою діяльністю. Виникає при здійсненні фінансових угод (в ролі товару виступає капітал, цінні папери, валюта).

Кредитний - непевненість кредитора в тому, що боржник збереже намір виконати свої зобов'язання у відповідності з термінами й умовами кредитної угоди.

Банківський – при здійсненні банківських операцій, що призводять до відхилення фактичних результатів від очікуваних.

2.4 Аспекти управлінської діяльності/

Сутність основних напрямів управлінської діяльності:

Управління за результатами – прихильники даного процесу управління виокремлюють три основних етапи:

- визначення бажаних результатів;

- управління залежно від ситуації;
- контроль за результатами.

Управління за цілями – надає можливість оцінювати керівників на підґрунті міри досягнення цілей. Прихильники даного процесу виділяють чотири основних етапи:

- вироблення чітких, лаконічних формувань сутності цілей;
- розробка реалістичних планів їх досягнення;
- системний контроль, вимірювання та оцінка роботи і результатів;
- коригуючи засоби для максимально можливого досягнення запланованих цілей.

Управління за відхиленнями – ґрунтується на виявленні і доведенні до відома керівника тільки тієї інформації, що обов'язково вимагає його уваги.

Передумови успішного попередження проблем в управлінській діяльності:

1. правильне розуміння важливості недопущення помилок;
2. прагнення до усунення помилок;
3. навчання методам вирішення проблем;
4. аналіз причини виникнення проблем;
5. система моніторингу проблем та оцінювання ефективності превентивних заходів.

Для опису причинно-наслідкового аналізу необхідно провести розпізнання причини, і зібравши необхідну інформацію зробити поетапний аналіз.

Перший етап: формулювання проблеми (виявляють об'єкт, підрозділ чи людину, які створюють труднощі та яких необхідно усунути).

Другий етап: опис проблеми.

Третій етап: виявлення відмінностей, які створюють проблему (необхідно виявити причину).

Четвертий етап: виявлення змін (потрібно виокремити найважливіші зміни).

П'ятий етап: виявлення можливих причин (яким чином дана зміна могла створити проблему).

Шостий етап: перевірка найбільш імовірних причин (чи не суперечить дана причина фактам розглядуваної ситуації).

Сьомий етап: підтвердження найбільш імовірної причини (використовують причинно-наслідковий аналіз для виявлення проблеми ,що виникла).

Наявність ризику в процесі діяльності як обов'язкового атрибуту – об'єктивний економічний закон. В умовах ринкової економіки неможливо управляти підприємством без урахування ризику, а для ефективного управління важливо не лише знати про його наявність, а й правильно ідентифікувати та структурувати ризики. Важливо враховувати, що існують аспекти управлінської діяльності, де постійно створюються ризиковані ситуації.

Управління ризиками – це необхідність використовувати в управлінській діяльності різноманітні підходи, процеси, заходи, які дозволяють певною мірою прогнозувати можливість настання ризикованих подій і домагатися зниження ступеня ризику до допустимих меж.

Визначимо основні принципи процесу управління ризиками.

1. Принцип максимізації – передбачає прагнення до найширшого аналізу можливих причин і чинників виникнення ризику. Цей принцип наголошує на необхідності зведення рівня невизначеності до мінімуму.
2. Принцип мінімізації - управлінці намагаються звести до мінімуму спектр можливих ризиків і мінімізувати ступінь впливу ризику на свою діяльність.
3. Принцип прийняття – управлінці можуть прийняти на себе тільки обґрунтований ризик.

Для процесу управління ризиком працівникам апарату управління необхідно передусім навчитись прогнозувати виникнення тих чи інших проблем і відповідних ситуацій.

Прогноз – можливі судження про можливі сценарії об'єкта управління в майбутньому, альтернативність траєкторії і терміни існування.

В процесі управління ризиком можна виокремити такі рішення:

1. за вибором цілей управління ризиком;
2. за виборів методів;
3. підтримки балансу в трикутнику "люди-ресурси-цілі" в процесі досягнення обтяжених ризиком цілей за допомогою обраного інструментарію управління ним.

Можливість альтернативних рішень висуває перед менеджером завдання оптимізації розподілу ресурсів між такими заходами:

1. попередження ризику усуненням його джерела;
2. зниження ризику за допомогою зменшення інтенсивності небажаних факторів чи вразливості об'єктів, які можуть бути піддані впливу несприятливих чинників.
3. відшкодування збитків ризику. Укладають договір фондового страхування.

Зниження ризику можливе:

1. на етапі планування операції чи проектування зразків – введення додаткових елементів надійності та інших необхідних заходів;
2. на етапі прийняття рішення – використання відповідних критеріїв оцінки ефективності рішення;
3. на етапі експлуатації відповідних систем – за рахунок додержання режимів експлуатації та контролю.

За прогнозною ефективністю в управлінні ризиками можна виокремити: ординарні, синергетичні, асинергетичні варіанти рішень і систем.

Ординарні варіанти ризикових рішень – це такі варіанти рішень, за яких ефективність витрати ресурсів на одиницю одержаного ефекту в

управлінні ризиком відповідає нормам і нормативам, прийнятим для певної галузі, виду діяльності.

Синергетичні варіанти ризикових рішень – це такі варіанти рішень. За яких ефективність витрати ресурсів в управлінні ризиком різко зростають.

Асинергетичними називають варіанти рішень, які не дозволяють одержати бажаного ефекту від інвестованих в управління ризиками коштів.

Прийняття рішення ґрунтується на використанні різних формалізованих і неформалізованих методів.

3.Кількісні оцінки економічного ризику.

3.1 Ризик в абсолютному виразі.

Виправданий ризик – атрибут стратегії і тактики ефективної економічної діяльності.

У кожній ситуації, що пов'язана з ризиком виникає питання: «що означає виправданий ризик і де проходить межа яка відділяє допустимий ризик від авантюри?» дати відповідь на ці питання, значить знайти рівень «прийнятого ризику», кількісну та якісну оцінки конкретних ризикових рішень.

Кількісну оцінку ризику проводять на підставі імовірнісних розрахунків. Кількісні значення ризику обчислюються у відносних і в абсолютних величинах, що виражають міру невизначеності під час реалізації прийнятого рішення.

Ступінь ризику може оцінюватись сподіваними збитками, що спричинені цим рішенням; та імовірністю, з якою ці збитки можливі.

Якщо малоімовірно, що будуть несприятливі наслідки – ризик малий, і мала імовірність помилки велика то збитки малі.

У ряді випадків ризик дорівнює добуткові сподіваних збитків на імовірність того, що ці збитки відбудуться.

Імовірність настання певної події може бути визначена: об'єктивним методом, що ґрунтується на обчислені частоти, з якою відбувається певна подія, і суб'єктивний метод, який спирається на використанні суб'єктивних оцінок та критеріїв, що ґрунтуються на припущеннях.

Ризик в абсолютному виразі може визначатися сподіваною величиною можливих збитків, і як міру ризику використовують середньоквадратичне відхилення.

Існує проста методика визначення коефіцієнта ризику щодо короткотермінового прогнозу:

p– імовірність достовірного прогнозу, то:

1-p – імовірність, що він не відбудеться.

В абсолютному виразі ступінь ризику, може визначатися, як добуток імовірності невдачі $(p_н)$ на величину цих небажаних наслідків *(x)*.

$$w = p_H x \qquad (3.1.1.)$$

Де:

w - величина ризику;

p_H - імовірність небажаних наслідків, що обчислюється на базі статистичних даних,

x - величина цих наслідків.

Сподіване значення (математичне сподівання), що пов'язане з невизначеною ситуацією, є середньозваженою усіх можливих результатів, де імовірність кожного із них використовується як частота або питома

вага, відповідного значення. Сподівання значення вимірює результат (ризик), котрий ми очікуємо в середньому.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини *x* називають суму добутків її можливих значень та відповідних ймовірностей.

$$m = M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \qquad (3.1.2)$$

Де:
x_i- значення випадкової величини;
i=1,2…
p_i – відповідні імовірності.
Для обмеженого *(n)*

$$m = M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (3.1.3)$$

Якщо випадкова величина x неперервна то:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (3.1.4)$$

або:

$$M(x) = \int_{a}^{b} xf(x)dx \qquad 3.1.5$$

Якщо неперервна випадкова величина визначена на інтервалі [a, b], f(x) – густина розподілу.
Розглянемо приклад на визначення ризику, як математичне сподівання втрат.
<u>Приклад:</u> Підприємство освоює новий вид товару. При цьому можливі збитки, як результат не досить вивченого ринку збуту під час маркетингових досліджень. Імовірні три варіанти щодо попиту на продукцію. Збитки при цьому складатимуть:

X_i	500	700	-600
p_i	0.2	0.4	0.4

Визначити сподівану величину ризику, тобто збитків.

Розв’язання: Розв’язуємо за формулою (3.1.2)
$W=M(x)$=500·0,2+700·0,4+(-600·0,4)=140 гр.од.

Дисперсією випадкової величини *x* яку позначають *D(x)* називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини *x* від математичного сподівання *M(x)*. Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно *M(x)*.

$$D(x)=M(x^2)-(M(x))^2 \qquad 3.1.6$$

Для дискретної випадкової величини x

$$D^2(x) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(x))^2 \qquad 3.1.7$$

Кращим буде той варіант, де дисперсія менша. Дисперсія дає більш стабільний результат.

Розглянемо приклад визначення ризику, як дисперсії.

<u>Приклад:</u> Нехай працівник має пропозицію вибору двох місць роботи. Потрібно вибрати одне з них на основі такої інформації.

Місце роботи	І варіант		ІІ варіант	
	імовірність	дохід	імовірність	дохід
А	0,5	100	0,5	200
Б	0,4	90	0,6	190

Розв'язання:

$$D(x)=M(x^2)-(M(x))^2$$

Визначимо $M(x)$- сподіваного доходу для кожного місця роботи:

$M(x_a)$=100·0,5+200·0,5=150 гр.од.

$M(x_в)$=90·0,4+190·0,6=150 гр.од.

Отже, середні доходи однакові.

Знаходимо D доходів для кожного місця роботи:

$$M(x^2) = \sum_{n=1}^{n} x_i^{\,2} p_i$$

$M(x_a^{\,2})$=100^2·0,5+200^2·0,5=25000 гр.од.

$D(x_a)$=25000-150^2=25000-22500=2500 гр.од.

Тепер шукаємо для Б:

$M(x_b)$=90^2·0,4+190^2·0,6=24900 гр.од.

$D(x_b)$=24900-150^2=2400

Висновок: Потрібно вибирати місце роботи Б, тому що D для нього менша.

Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D(x)} \qquad 3.1.8$$

3.2 Ризик у відносному вираженні.

Ризик у відносному вираженні може визначатися як відношення можливих збитків до деякої базової величини: (обсяг майна підприємства, загальні витрати ресурсів або сподіваний прибуток).

Якщо під ризиком розуміти ризик банкрутства, то він визначається не лише коливанням курсу цінних паперів, але й власним наявним капіталом:
Ризик вимірюють за допомогою коефіцієнта:

$$W = \frac{x}{K} \qquad 3.2.1$$

Де:
x – максимально можливий обсяг збитків;
W- коеф.ризику;
к – обсяг власних фінансових ресурсів.

Приклад: Один з наших емігрантів заощадив 10 тис.$, взяв в борг ще 40 тис.$, під 10 % річних, і вклав усі 50 тис.$ в акції однієї компанії розраховуючи на річне зростання курсу в 20 %.Курс почав падати, і коли він знизився на 40% він продав ненадійні акції. В результаті цього він повернув 30 тис.$, понісши при цьому збитки 24 тис.$. Його знайомий американець вклав 50 тис.$, і повернув 30 тис.$. Визначити ступінь ризику для американця і емігранта.
Розв'язання:
Збитки:

американця	емігранта
x_a=20 тис.$	$x_{ем}$=24 тис.$
K_a=50 тис.$	$K_{ем}$=10 тис.$
$W_a=\frac{20}{50}=0,4$	$W_{ем}=\frac{24}{10}=2,4$

Тобто, ступінь ризику для емігранта в 6 раз більший від американця.

Ризик може визначатись також, як коефіцієнт варіації відповідного економічного показника.

$$V(X)=\frac{\sigma(x)}{M(x)}*100 \qquad 3.2.2$$

Він потрібен, коли сподівані доходи одного проекту відрізняються від сподіваних доходів іншого проекту. В такому випадку важко порівняти абсолютні показники дисперсії. Необхідно визначити (або виміряти) ризикованість проекту відносно сподіваних доходів і мірою цього є коефіцієнт варіації або співвідношення ризику і доходу.

Приклад: Є два види акцій. Ефективність їх є випадковою величиною і залежить від стану економічного середовища. Сподівана ефективність цих акцій однакова. Вважають, що на ринку можуть виникнути дві ситуації.

Q_1 – з $p_1=0,2$

Q_2 – з $p_2=0,8$.

Різні акції реагують на ці ситуації по-різному. Курс акцій першого виду у ситуації Q_1 зростає на 5%, у ситуації Q_2 на 1,25%. Курс акцій другого виду у ситуації Q_1 падає на 1%, а у ситуації Q_2 зростає на 2,75%.

Припустимо. Що інвестор взяв гроші в борг під 1,5% річних. Які акції слід придбати?

Розв'язання: знайдемо доходи:

$M_1=5\%\cdot 0,2+1,25\%\cdot 0,8=2\%$

$M_2=-1,0\%\cdot 0,2+2,75\%\cdot 0,8=2\%$

Дисперсію

$$D_1=(5-2)^2 * 0,2+(1,25-2)^2 * 0,8=2,25$$

$$D_2=(-1-2)^2 * 0,2+(2,75-2)^2 * 0,8=2,25$$

Відсоток, під який можна взяти борг дорівнює 1,5%, а сподівана ефективність дорівнює 2%. Отже, є резон брати гроші в борг.

Якщо інвестор вкладе гроші в акції першого виду і реалізується ситуація Q_1, то він виграє: 5%-1,5%=3,5%, якщо акції другого, то збанкрутує: -1%-1,5%=-2,5%

Коли відбудеться ситуація Q_2, то:

акції першого виду: 1,25%-1,5%=-0,25%

акції другого виду: 2,75%-1,5%=1,25%

Оскільки, стани еконеомічного середовища Q_1, Q_2 мають різну імовірність, рішення інвестора не є рівнозначне з точки зору ризику банкрутства: при вкладанні грошей в акції першого виду банкрутство можливе з $p_1=0,8$ в другому випадку— $p_2=0,2$.

Таким чином при однаковості сподіваних ефективностей та дисперсій, а також власного початкового капіталу, ризик банкрутства може бути різним.

У даному випадку, слід обрати той вид акцій, імовірність банкрутства яких у зв'язку з несприятливим станом середовище буду меншою:

Отже інвестору слід придбати акції другого виду.

Тут імовірність несприятливого стану економічного середовища виступає, як міра ризику.

В загальному випадку:

$$\begin{aligned} &M_1 > M_2,\ але\ D_1 > D_2 \\ &M_1 < M_2,\ але\ D_1 < D_2 \end{aligned} \qquad 3.2.3$$

або це залежить від схильності до ризику суб'єкта ризику – особи, що приймає рішення .

<u>Приклад</u>

Торгова фірма одержує вироби від трьох постачальників. Перший дає 1% браку, другий 2%, третій 3%.

Потрібно визначити частку продукції від кожного постачальника і з умови рівності ризиків торгової фірми відносно кожного з них, визначити загальний ризик торгової фірми:

Оскільки вся інформація має імовірносний характер, то ризик визначаємо також як імовірність деякої події (реалізація бракованого виробу);

Введемо такі події: *A*- фірма реалізує бракований виріб;

p_1 - проданий виріб від першого постачальника,
p_2 – проданий виріб від другого постачальника,
p_3 - - проданий виріб від третього постачальника.

Оскільки є три гіпотези, то використаємо формулу Байєса;

$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A),} \qquad 3.2.4$$

якщо подія А вже відбулася, тоді:

$$\boldsymbol{P_A(B_i) = \frac{P(B_1) * P_{B_i}(A)}{P(A)}} \qquad 3.2.5$$

Позначимо через x_1- частку виробів від першого постачальника.
x_2- другого, $(1-x_1-x_2)$- третього. Оскільки ризики рівні, то
$P_f(B_1) = P_f(B_2) = P_f(B_3)$. На основі формули Байєса і рівності ризиків одержимо таку систему рівнянь:

$$P(B_1)P_{B_1}(A) = P(B_2)P_{B_2}(A)$$

$$P(B_1)P_{B_1}(A) = P(B_3)P_{B3}(A)$$

$0.01x_1=0.02x_2 \quad (*)100$
$0.01x_1=0.03(1- x_1 x_2)$
$x_1=6/11,\ x_2=3/11,\ x_3=2/11.$

Висновок: із кожних 11 одержаних виробів 6 – від першого виробника, 3 – від другого, 2 – від третього. Загальний ризик:

$$P(A) = \frac{6}{11}0.01 + \frac{3}{11}0.02 + \frac{2}{11}0.03 = \frac{18}{1100}$$

Із одержаних 1100 виробів 18 буде бракованих.

4.Ризик і корисність.

4.1.Поняття про корисність. Побудова функції корисності.

Корисність-це міра задоволення, яке одержує суб`єкт від споживання товару або виконання деякої дії.

На основі цього означення кожному товару або кожній дії потрібно поставити у відповідність певне число. З допомогою корисності можна порівняти споживчий ефект товарів.

Практичну побудову функції корисності розглянемо експертним методом.

Побудова функції корисності може бути здійснена групою експертів за спрощеною формулою.

І етап. Визначають у відсотках найкраще та найгірше з можливих допустимих значень показника присвоюють їм значення корисності. Для цього визначають нижню і верхню межу цього показника і присвоюємо їм відповідні корисності. Нехай $X_{min}=80\%$, $X_{max}=100\%$

Корисність: $U(X_{min})=0$, $U(X_{max})=1$

ІІ етап. Розглядають ще декілька проміжних значень, та визначають значення функції корисності.

ІІІ етап. Після того, як кожен із членів експертної групи зробив самостійну оцінку корисності проміжних значень, обчислюють середні рівні цих оцінок

IV етап. При великій розкиданості оцінок експертів від середніх величин повертаються до етапу ІІ.

5. Диверсифікація, як спосіб зниження ризику. Теорія портфеля.

5.1..Поняття про диверсифікацію, норму прибутку і ризик цінних паперів.

Для роботи будь-якого підприємства важливий асортимент товарів, послуг. Чим він ширший, тим чіткіший є ритм виробництва, вища його рентабельність. Проте це впливає на мобільність відносно змін зовнішнього середовища.

На ринку цінних паперів в країнах з розвинутою ринковою економікою основний принцип раціонального поводження відповідає побутовій мудрості: “Ніколи не клади всі яйця до одного кошика ”. Стосовно ризику цінних паперів це означає ,що інвестор не повинен вкладати гроші у цінні папери лише одного виду. Необхідне певне розмаїття, диверсифікація вкладень. Отже:

Диверсифікація – це розподіл інвестицій між різними об’єктами вкладення, які безпосередньо не зв’язані між собою.

З допомогою диверсифікації в більшості випадків вдається знизити ризик. Отже диверсифікація – це один із способів зниження ризику.

Найчастіше інвестиції здійснюються за допомогою цінних паперів.

Ефективність цінних паперів залежить:

1) ціна купівлі (це відома величина)

2) проміжних виплат

3) ціна продажу

Економічний фінансовий ризик пов’язаний з невизначеністю відносно прогнозу на майбутнє стосовно цін (продажу, а для звичайних акцій і майбутніх дивідендів).

Власне тому досвідчений інвестор є власником не одного виду цінних паперів, а декількох. Сукупність цінних паперів складає портфель.

Під **структурою цінних паперів** розуміють співвідношення часток інвестицій у цінні папери різних видів та підприємств у різного інвестора.

Визначення структури є дуже важливим. Приймається гіпотеза, що будь-які конкретні величини ефективності (норми прибутку) операції з купівлі-продажу цінних паперів є реалізаціями випадкової величини. Тому основним апаратом для вивчення властивостей портфеля є правила теорії імовірності та математичної статистики.

Будь-який вид ризикових цінних паперів характеризуються двома показниками: сподіваною ефективністю (нормою прибутку) і ступенем ризику (варіацією (дисперсією)). Ці ж показники можна обчислити для портфеля цінних паперів, якщо відомі коефіцієнти кореляції між ефективностями кожної з пар цих паперів.

Зрозуміло, що кожний інвестор завжди зіштовхується з дилемою: бажанням мати якомога більшу ефективність портфеля та бажанням забезпечити вклади мінімальним ступенем ризику.

Проблемою обрання структури портфеля займалися Г. Марковіц та Д. Тобін, за що були відзначені Нобелівськими преміями з економіки.

Портфель цінних паперів – це розподіл засобів між цілим рядом різних активів у найбільш вигідній та безпечній пропорції.

Правило для інвестора: - необхідно прагнути розподілити вкладання між різними видами активів, такими що показали минулі роки:

1) різну щільність зв'язку (кореляцію) з загальноринковими цінами;

2) протилежну фазу коливань норми прибутку між собою (цін) всередині портфеля.

При цьому збитки будуть мінімальними. Але питання одержання максимального прибутку залишається відкритим. Для цього необхідне застосування теорії корисності.

Управління портфелем цінних паперів – це планування, аналіз і регулювання структури портфеля, діяльність по його формуванню та підтримці з метою досягнення поставлених цілей при збереженні необхідного рівня його ризику та мінімізації затрат, що пов'язані з ним.

Основні цілі інвестування :

1) одержання прибутку;

2) збереження капіталу;

3) забезпечення приросту капіталу (на базі зростання курсової вартості цінних паперів).

Ліквідність цінних паперів розглядають з двох позицій:

 здатність швидкого перетворення всього портфеля цінних паперів у грошові засоби (з певними невеликими затратами на реалізацію).

 здатність своєчасно погасити зобов'язання перед кредиторами, повернення позичених у них грошей ,за рахунок яких був сформований портфель цінних паперів.

Ризик портфеля – це міра можливості того , що настануть обставини, за яких інвестор може понести збитки, спричинені інвестиціями в портфель цінних паперів ,а також операціями по залученню ресурсів до формування портфеля.

Кінцевою метою найтиповішого управління портфелем є прибутковість, тобто перевищення доходів від інвестицій в цінні папери над затратами на залучення грошових ресурсів, необхідних для цих вкладень , за умов забезпечення певного ступеня ліквідності та ризику портфеля.

Основною характеристикою кожного цінного паперу є норма прибутку. Її визначають, як відношення прибутку котрий приносить даний цінний папір, до затрат, пов'язаних з купівлею цього цінного паперу.

Норма прибутку є одним з основних критеріїв , якими керуються інвестори, під час прийняття рішення щодо купівлі цінних паперів.

Зрозуміло, що значення норми прибутку пов'язане з невизначеністю, тобто є випадковою змінною. Це означає , що вона може приймати різні значення з різними імовірностями.

Введемо *n*- кількість можливих для спостереження величин норми прибутку.

R_i – *i*-те можливе значення норми прибутку (*i*=1, *n*).

P_i – імовірність *i*-ї величини норми прибутку (*i*=1, *n*).

Тоді сподівана норма прибутку обчислюється:

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i \qquad 5.1.1$$

Приймають, зокрема, що поводження в майбутньому цінного паперу залежить від того , як формувалися його норми прибутку в минулому.

Введемо : *T* – кількість періодів , що минули ;

R_t – норма прибутку від цінного паперу, що мала місце в *t* – му періоді.

У випадку звичайної акції норма прибутку в *t* – му періоді визначається :

$$R_t = \frac{(C_t - C_{t-1} + D_t) \times 100}{C_{t-1}} \qquad 5.1.2$$

C_t - ціна паперу в *t* – му періоді.

D_t - дивіденди, нараховані в *t* – му періоді.

Сподівана норма прибутку ЦП:

$$m = (\sum_{t=1}^{T} R_t) / T \qquad 5.1.3$$

Другою важливою характеристикою є ризик ЦП – варіація норми прибутку

$$\sigma = \sqrt{Dx} \qquad 5.1.4$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} p_i (R_i - m)^2 \qquad 5.1.5$$

У випадку, коли наявні статистичні дані щодо минулого, варіацію визначають :

$$D = \sum_{t=1}^{T} (R_t - m)^2 / (T-1) \qquad 5.1.6$$

Приклад: На знаходження ризику ЦП

Стан економічного середовища	Імовірність	Норма прибутку
піднесення	0,5	40%
застій	0,4	5%
занепад	0,3	-10%

Розв'язання:

Знаходимо сподівану норму прибутку ЦП.

m=40∗0.3+5∗0.4+(-10) ∗0.3=11%

визначимо дисперсію норми прибутку

$D=40^2*0,3+5^2*0,4+10^2*0,3-11^2=399$

$\sigma=\sqrt{399}$=19,97% - ризик ЦП.

<u>Приклад</u> . Знайти ризик акції ***A***, відносно якої ми маємо статистичні дані за останні 5 років.

Період часу	C_t	d_t	C_{t-1}	R_t
0	140	-	-	-
1	150	5	10	10,71
2	165	4	15	12,07
3	155	3	-10	-4,85
4	160	2	5	5,16
5	157	1	-3	1,25

$$R_1 = \frac{10+5}{140} 100 = 10.71\%$$

$$R_2 = \frac{15+4}{150} 100 = 12.07\%$$

Знаходимо середню норму прибутку:

$$m = \frac{10.71 + 12.07 + (-4.85) + 5.16 - 1.25}{5} = 4.49$$

Знайдемо :

$$D_{(x)} = ((10.71 - 4.49)^2 + (12.07 - 4049)^2 + (-4.85 - 4.49)^2 + (5.16 - 4.49)^2 +$$
$$+ (-1.25 - 4.49)^2)/4 == 56.56$$

$$\sigma = \sqrt{56.56}$$

5.2.Оптимізація пакету з двох різних видів акцій.

Як правило, розсудливий інвестор шукає такі можливості розміщення капіталу, за яких зі збільшенням норми прибутку одночасно зменшувався ступінь ризику. Такі можливості дає йому формування портфеля цінних паперів. Вона характеризує взаємозв'язок між нормами прибутку ЦП.

Припустимо що портфель утворюють дві різні акції А та В:

Види акцій	Норма прибутку	дисперсія	середньоквадратичне відхилення
А	m_1	D_1	σ_1
В	m_2	D_2	σ_2

Припустимо, що інвестор посідає до якого входить 100 акцій певної дніпропетровської фірми (А) та 200 акцій певної київської фірми (В).

Ціна однієї акції А – 500 тис грн., В – 200 тис грн. Знайдемо частку вартості кожного виду акцій в портфелі :

$$x_1 = \frac{100 \cdot 500}{100 \cdot 500 + 200 \cdot 200} = 0.56$$

$$x_2 = \frac{200 \cdot 200}{100 \cdot 500 + 200 \cdot 200} = 0.44$$

Очевидно, що частка кожної є величиною $0 \le x \le 1$.

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad 5.2.1$$

Частки можна трактувати як частини від одиниці капіталу (грошей), що вкладені у відповідний вид цінних паперів. Знаючи сподівані величини норми кожної з цих акцій та їх частки в портфелі, легко визначити сподівану норму прибутку портфеля з двох акцій за формулою:

$$m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2 \qquad 5.2.2.$$

де

m_p - норма прибутку портфеля з двох різних акцій.

Норма прибутку портфеля з двох різних акцій є зваженою середньою нормою прибутку кожного виду акцій, причому ваговими коефіцієнтами виступають частки цих акцій (в грошовому обсязі) в портфелі .

Приклад.. Інвестор посідає портфель, що складається з двох акцій А та В з нормами прибутку 200% та 250% відповідно, причому частка акцій А становить 40% портфеля.

Розв'язання:

$$m_p = 0.4 \cdot 200\% + 0.6 \cdot 250\% = 230\%$$

Норма прибутку портфеля з двох акцій завжди знаходиться в інтервалі, граничними якого є норми прибутку акцій, що входять до портфеля .

Визначимо ризик (варіація і дисперсія) портфеля двох акцій:

$$D_p = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \qquad 5.2.3$$

σ_1 - середнє квадратичне відхилення норми прибутку акцій першого виду;

σ_2 - середнє квадратичне відхилення норми прибутку акцій другого виду;

ρ_{12} - коефіцієнт кореляції між акціями обох видів і визначається :

$$\rho_{12} \frac{\sum p_i(R_{1i} - m_1)(R_{2i} - m_{2i})}{\sigma_1\sigma_2} \qquad 5.2.4$$

p_i — імовірність стану середовища;

R_{1i} — норма прибутку акцій першого виду;

m_1 — середня норма прибутку акцій 1-го виду;

R_{2i} — норма прибутку акцій першого виду в іншому стані середовища;

m_2 — середня норма прибутку акцій 2-го виду.

1. Коефіцієнт кореляції $-1 \le \rho_{12} \le 1$.

2. $|\rho|$ - вказує на силу взаємозв'язку норм прибутку акцій, тому чим вищою є абсолютна величина , тим сильніше між собою пов'язані ці акції (тобто ≈1, або ≈-1), якщо ж $|\rho| \to 0$, то ці акції слабо пов'язані.

3. Знак коефіцієнта кореляції вказує на напрямок взаємозв'язку норми прибутку акцій; якщо ρ >0, то додатна кореляція, при зростанні норми прибутку (R_1) однієї акції зростає, зростає R_2 другої акції.

Якщо ρ < 0, то від'ємна кореляція, при зростанні норми прибутку (R_1) однієї акції зростає, R_2 другої акції спадає.

На практиці додатна кореляція зустрічається частіше. Це пов'язано з так званою, силою прискорення ринку.

Маючи інформацію відносно норм прибутку акцій у минулому, коефіцієнт кореляції двох акцій приймає такий вигляд:

$$\rho_{12} \frac{\sum p_i (R_{1t} - m_1)(R_{2t} - m_{2i})}{(T-1)\sigma_1 \sigma_2} \qquad 5.2.5.$$

де

T — к-сть попередніх періодів, для яких маємо інформацію;

R_{1t} — норма прибутку першого цінного паперу в t-му періоді;

R_{2t} — норма прибутку другого цінного паперу в t-му періоді;

m_1 — сподівана норма прибутку першої акції;

m_2 — сподівана норма прибутку другої акції;

σ_1 — ризик I-го цінного паперу;

σ_2— ризик II-го цінного паперу.

Як видно ризик портфеля залежить не тільки від ризику кожного виду акцій, а і від кореляції цих акцій, тобто від ступеня взаємодії їх норм прибутку.

Тема: Використання, теорії гри та статистичних рішень до моделювання ризику

1. Інформаційні ситуації ступенів градації невизначеності.

Під теорією ігор розуміють теорію математичних моделей та методів прийняття раціональних рішень за умов конфлікту та невизначеності.

Конфліктні ситуації характеризуються наявністю декількох суб'єктів, що мають різні цілі. Але важливо пам'ятати, що під час вибору рішення за умов невизначеності неможливо уникнути певного суб'єктивізму та елемента ризику.

Предметом теорії рішень за умов ризику є дослідження законів перетворення апріорної та апостеріорної інформації про стан об'єкта та середовища в кількісні характеристики інформації керування.

Широко відомою моделлю прийняття рішень за умов невизначеності є статистична модель. Згідно з концепцією теорії ігор визначають основні елементи прийняття рішень невизначеності та ризику.

Прийняття рішень здійснюється на основі таких показників:

1) множина рішень суб'єкта керування X ($x_1,x_2,\ldots,x_n$) – це означає, що суб'єкт керування може прийняти одне із n варіантів рішень.
2) множина станів економічного середовища S ($s_1,s_2,\ldots,s_n$) - вважають, що економічне середовище може прийняти один із можливих n станів.

Економічне середовище – це все, що знаходиться за межами економічного об'єкту.

3) ефективність діяльності економічного об'єкту кількісно характеризується матрицею оцінювання F $\{V_{kj}\}$ – якщо суб'єкт керування обрав рішення X_k, а економічне середовище набуло стану S_j. У розгорнутій формі матриця F записується так:

$$F = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \ldots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \ldots & V_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_{m1} & V_{m2} & \ldots & V_{mn} \end{pmatrix}$$

Ефективність діяльності буває позитивною F^+, та негативною F^-.

Діяльність позитивна – це прибуток, обсяг випущеної продукції, рентабельність, і т. д.

Негативна ефективність – це затрати, збитки, енергомісткість, матеріаломісткість і т.д.

Позитивну ефективність необхідно збільшувати, а негативну зменшувати.

Прийняття рішень здійснюється в такій послідовності:

1. визначення можливих варіантів рішень суб'єкта керування;
2. знаходження всіх можливих станів економічного середовища;
3. формування матриці оцінювання;

4. визначення виду інформаційної ситуації;
5. вибір критерію для прийняття рішень;
6. прийняття рішень.

Інформаційні ситуації діляться на такі види:

1) перша інформаційна ситуація характеризується розподілом апріорних ймовірностей та елементах множини V_{ij};
2) друга інформаційна ситуація характеризується заданим розподілом ймовірностей за невідомими параметрами;
3) третя інформаційна ситуація характеризується заданою системою лінійних співвідношень на компонентах оріорного розподілу станів середовища.
4) четверта інформаційна ситуація характеризується невідомим розподілом ймовірностей на елементах множини V_{ij};
5) п'ята інформаційна ситуація характеризується антагоністичними інтересами середовища у процесі прийняття рішень;
6) шоста інформаційна ситуація характеризується як проміжна між (1) і (5) при виборі середовищем своїх станів.

2. Критерії прийняття рішень при заданому розподілі ймовірностей станів середовища.

Нехай маємо **першу інформаційну** ситуацію, тобто відомі імовірності станів економічного середовища. Ці імовірності ч/з p_j; імовірності повинні задовольняти такі умови:

1. $0 \le p_j \le 1$ *
2. $\sum_{i-1}^{n} p_j = 1$ **

Розглянемо критерій Байєса, який використовує математичне сподівання ефективної діяльності економічного об'єкта у виборі рішення, для якого досягається max (min) значення математичного сподівання позитивного (негативного) результату. І має такий вигляд:

1) $$W = \begin{cases} \max\limits_{k} \sum\limits_{j=1}^{n} p_i V_{kj}, для\, F^{+}\,(прибуток, рентабельність) \\ \min\limits_{k} \sum\limits_{j=1}^{n} p_i V_{ki}, для\, F^{-}\,(збитки, витрати) \end{cases}$$

Приклад. Підприємство може виготовити 3 види продукції і при цьому можливі 2 варіанти її реалізації. Потрібно прийняти рішення про виготовлення одного виду продукції на основі кожного критерію для такої матриці прибутків.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

а) для критерію Байєса відомі імовірності у варіанті реалізації продукції p_1=0,4, p_2=0,6.

б) застосовуємо критерій Байєса:

V_1=0,4*2+0,6*9=6,2 – max

V_2=0,4*5+0,6*6=5.6

V_3=0,4*7+0,6*3=4,6 – min

Потрібно виготовити прямий вид продукції для F^+. Нехай матриця оціноване негативне F^-, серед одержаних результатів обираємо найменше.

ЧЕТВЕРТА ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА

Розглянемо випадок, коли імовірності станів середовища невідомі, та вони не протидіють прийняттю рішень. Також ситуація можлива при виробництві нових видів продукції, послуг і т.д. в такому випадку приймається гіпотеза, що всі можливі стани середовища мають одинакову імовірність прояву.

Якщо кількість станів середовища n, то на основі умови, що сума ймовірностей дорівнює 1, одержимо 3(**)

$p_j = \frac{1}{n}$, в результаті цього одержимо першу інформаційну систему. Застосовуємо систему Байєса (1).

$$W=\begin{cases} \max \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{n_k} V_{kj}, F^A \\ \min \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{n_K} V_{kj}, F^- \end{cases}$$

Величину 1/n можна винести за знак $\sum$,оскільки вказана величина не залежить від індекса сумування

α,

$$W=\begin{cases} \max \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} V_{KJ} - F^+ \\ \min \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} V_{KJ} - F^- \end{cases}$$

У зв’язку з тим , що 1/n не залежить від індекса k, то її можна винести за max і min

$$W=\begin{cases} \frac{1}{n} \max \sum\limits_{j=1}^{n} V_{KJ} - F^+ \\ \frac{1}{n} \min \sum\limits_{j=1}^{n} V_{KJ} - F^- \end{cases}$$

Приклад (умова та сама) тільки нехай ми маємо 4 –ту ін фор. сит. заст. критерій Лапласа ,

V_1=2+9=11

V_2=5+6=11

V_3=7+3=10

Отже, необхідно виготовляти або 1-ий, або 2-ий вид продукції для F^+, 3-ий при F^-.

5 –та інформаційна ситуація

Нехай маємо 5-ту інформ. ситуацію. Вона характеризується тим ,що економ. серед. активно протидіє прийняттю оптимального рішення в зв'язку з цим потрібно прийняти рішення, яке зводить ризик до нуля.

5-та ситуація зустрічається в умовах конфліктності та конкуренції. Рішення приймаються за принципом гарантованого результату, який враховує найгірший варіант для суб'єкта керування.

Якщо ефективність позитивна, то для одержання гарантованого результату потрібно відносно станів середовища вибирати найгірший варіант, а відносно рішення суб'єкта-найкращий.

$$\begin{cases} \max \cdot \min V_{rj} - F^+ \\ \min \end{cases}$$

Це є критерій Вальда, який є називають максимінним або песимістичним . Він співпадає з критерієм вибору стратегії у теорії ігор , який визначає нижню або верхню ціни грн., і застосовується у ситуаціях антагонізму між об'єктом керування та середовищем

Для негативної матриці оцінювання в кожному її рядку вибираємо найбільше число і серед них визначаємо найменше F^- .

П-д (цей самий, лише потрібно оцінити за критерієм Вальда)

$$F^+=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \min \left.\begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{matrix}\right\} \max\text{---}5$$

Отже потрібно виготовити 2-й вид.

для

$$F^-=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \max \left.\begin{matrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}\right\} \min\text{---}6$$

Теж другий вид продукції.

Розглянемо критерій Севіджа, який враховує ризик з допомогою побудови матриці втрат. Елементи матриці втрат визначаються як різниця

між найкращим варіантом рішення, якщо стан середовища відомий та відповідними елементами матриці оцінювання.

Нехай ефективність позитивна(F^+).Відомо, що економічне середовище прийняло j-й стан. Тоді оптимальний варіант рішення буде maxVkj. Якщо ефективність негативна (F^-), то найкращий варіант рішення визначається формулою minVkj.

На основі цього елементи матриці втрат визначаються такими співвідношеннями:

$$Ukj=\begin{cases} \max Vkj - Vkj & F^+ \\ Vkj - \min Vkj & F^- \end{cases}$$

До матриці втрат застосовуємо критерій Вальда. Оскільки матриця втрат-це негативна ефективність, то рішення приймається за формулою:

$$W=\min_{k} \max_{l} Ukj$$

За цією формулою, що в кожному рядку матриці втрат потрібно визначити найбільше число і серед них встановити найменшу величину.

П-д(той самий, лише за критерієм Севіджа)

З цією метою формуємо матрицю ризиків, визначивши у кожному стовпці матриці F^+ найбільший елемент і віднявши від нього почергово всі числа відповідного стовпця.

$$F^+\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} 7-2 & 9-9 \\ 7-5 & 9-6 \\ 7-7 & 9-3 \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} \Big\} \min \to 3$$

До матриці U застосовуємо критерій Вальда.В результаті встановлюємо,що підприємство повинно виготовляти другий вид продукції.

6-та інформаційна ситуація

Розглянемо шосту інформаційну ситуацію, яка є проміжною між 1-ю і 2-ю.

В цьому випадку критерій Гурвіца:

Він грунтується на поєднані оптичного та песимістичного варіантів з допомогою коефіцієнта ризику.

Нехай матриця оцінювання позитивна. Тоді оптимістичний варіант має вигляд:

$$\max_{к}(\max_{j} V_{rj})$$

а песимістичний:

$$\max_{к}(\min_{j} V_{rj})$$

Песимістичний варіант вже розглядався в критерії Вальда.

Отже, критерій Гурвіца для позитивної ефективності записується так:

$$\max_{x_k \in X} \left\{ \lambda \min_{\theta_j \in \theta} f_{k_j}^{+} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \theta} f_{k_j}^{+} \right\}$$

Тема:Вартість,час і ризик.

1.Вартість і час, і норма дисконту та ризик.

Власник капіталу може використати тепер його або інвестувати у певну справу з метою збереження і примноження цього капіталу.

Якщо існує декілька варіантів інвестування з однаковими майбутніми доходами, то вибирається той варіант, при якому доходи надійдуть як найшвидше.

Отже, важливу роль відіграє зміна вартості за часом. Зміна вартості під впливом часу визначається із застосуванням норми дисконту.

Норма дисконту — це норма доходу на альтернативні інвестиційні можливості, які доступні на ринку і мають приблизно однакову величину ризику.

Із зростанням ризику норма дисконту також зростає і навпаки.

2.Визначення теперішньої і майбутньої вартості.

Нехай відома норма дисконту r і початкова вартість капіталу PV. Потрібно визначити вартість капіталу ч/з деякий час. Якщо розглядається річна норма дисконту, то через рік вартість капіталу становитиме:

$$FV_1 = PV + rPV = PV(1+r)$$

Якщо величина r задана у % то її потрібно поділити на 100 .

Через 2 роки:

$$FV_2 = PV(1+r) + rPV(1+r) = PV(1+r)^2$$

На основі цих двох формул можна записати вартість капіталу через t років

$$FV_t = PV(1+r)^t$$

Приклад Нехай початкова вартість капіталу PV=1000 гр.од.

r=0.3,або 30%.Визначити вартість капіталу через 2 роки.

$$FV_2 = 1000(1+0.3)^2 = 1690 \text{ гр.од}$$

Запишемо формулу для визначення майбутньої вартості, дисконту змінюється з часом

$$FV_t = PV(1+r_1)^{T_1} + (1+r_2)^{T_2} + \ldots + (1+r_k)^{T_k}$$

r_1 - норма дисконту, яка діяла на протязі часу T_1 і т.д.

Розглянемо визначення теперішньої вартості капіталу на основі його майбутньої вартості.

Теперішня вартість визначається

$$PV = \frac{FV_t}{(1+r)^t}$$

Якщо майбутні доходи появляються в різні моменти часу,теперішня їх сумарна вартість визначається так:

$$PV = \sum_{t=1}^{T} \frac{FV_t}{(1+r)^t}$$

Приклад. Є 2 варіанти одержання певного доходу. Перший варіант: одночасно одержали в даний момент величину 2300 гр.од. Другий варіант: щорічно одержувати по 1200 гр.од протягом 3 років. При цьому річна норма дисконту 10 %.Вибрати кращий варіант.

Визначимо теперішню вартість доходу в 2 варіанті.

$$PV = \frac{1200}{(1+0.1)^1} + \frac{1200}{(1+0.1)^2} + \frac{1200}{(1+0.1)^3} = 2995\,\text{гр.од}$$

Висновок: вибираємо 1-й варіант, тому що його теперішня вартість більша.

Методика виконання задачі №9.

Умова: Підприємство сподівається одержати дохід 1млн. гр. од. при нормі дисконту 5%. Визначити теперішню вартість майбутнього доходу в залежності від часу його надходження.

Запишемо теперішню вартість доходу, якщо він надійде через рік.

$$PV = \frac{FV_1}{(1+r)^1}$$

$$PV = \frac{1 \cdot 10^6}{1+0.05} = 952.381 \textit{гр.од.}$$

Результати обчислення записуємо у вигляді таблиці

Час надходження	Теперішня вартість
0	$1*10^6$
1	952,381
2	907,029
3	863,838

В залежності від величини втрат визначає такі зони ризику:

1. безризикова зона – це зона в якій відсутні втрати.
2. зона допустимого ризику – це область в якій величина не перевищує очікуваного прибутку. Економічна діяльність в цій зоні допустима, тому що в найгіршому випадку можна втратити очікуваний прибуток.
3. зона критичного ризику – це область в якій втрати більші від очікуваного прибутку і не перевищують величини виручки. В цій зоні у найгіршому випадку можна втратити весь капітал, який вкладений в дану діяльність.
4. зона катастрофічного ризику – це область в якій величина втрат перевищує виручку і може досягнути вартості всього майна. Економічна діяльність в даній зоні недопустима.

Система антиризикових заходів.

Основні антиризикові заходи такі:

1. диверсифікація ризику полягає в розподілі ризику між різними видами діяльності або різними учасниками проектів.
2. страхування.