1. Поняття ризику.

1.1. Ризик як економічна категорія.

Ризик, як історична категорія виник на зорі цивілізації – тоді коли у людини зявилось усвідомлення щодо винекнення несприятливих ситуацій.

Більшість істориків стверджують, що в XVI-XVII століттях, в епоху великих географічних відкритів і морських подорожей, прибутки від торгівельних операцій були величезними і прямо пропорційними ступеню ризику.

Наукові уявлення щодо ризику складалися поетапно. Це явище почали вивчати статистики, економісти, юристи, математики.

Вперше наукове, математичне визначення поняття "ризик" було сформульоване понад 200 років тому німецьким математиком Йоганном Ніколаусом Тетенсом (1736-1807) у праці "Вступ до розрахунку життєвої ренти і право її отримання", виданій ще у 1786р. в Лейпцігу. Цим він започаткував основи нового напряму – ризикології науки про ризик в економіці, яка знайшла практичне застосування в багатьох сферах економіки. Пізніше теорія проблеми ризику почала розроблятися в рамках класичних ідей Мілля і Сеньора. Вони визначали в структурі прибутку підприємця відсоток ризику як частку на вкладений капітал, заробітну плату капіталіста і плату за ризик, як відшкодування можливих збитків, повязаних з підприємницькою діяльністю. Неокласик Альфред Маршал розклав прибуток подібно до класиків, на заробітну плату керівникам, відсоток на капітал і плату за ризик. Теорію ризику Джон Мейнард Кейнс розглядає, як частку вартості повязану з можливими витратами які виникають через непередбачувані зміни.

Нове трактування ризику запропонував американський економіст Френк Найт. Він розглядає ризик не просто як матеріальний збиток, а як наслідок невизначеності прибутку, що і поклало основу сучасної теорії фінансового ризику, яку використали відомі західні економісти Маркевич і Шарпе.

За останні роки зявилось ряд робіт з теорії ризику вітчизняних і зарубіжних економістів, зокрема О.Альгіна, І.Балабанова, І.Бланка, В.Вітлінського і інших.

Теоретичні дослідження і практика переконують. Що ризик досить широке поняття. Специфічний предмет наукового дослідження, що має свій статус. Щоб дати обгрунтоване визначення ризику спочатку необхідно зясувати що він являє собою у фінансово-економічній сфері. Вивчаючи та враховуючи ризик необхідно мати чітке уявлення про його об'єкт, суб'єкт, джерела. Формулюючи його визначення, необхідно звернути увагу на те що ризик має діалектичну обєктивно-субєктивну структуру.

Об'єктивність ризику у фінансово-економічній сфері грунтується на тому. що він існує через обєктивні, притаманні економіці категорії конфліктності, невизначеності, розпливчастості, відсутності вичерпної інформації на момент оцінювання та прийняття управлінських рішень.

Суб'єктивність ризику зумовлюється тим, що в економіці діють реальні люди зі своїм досвідом, психологією, інтересами, смаками, схильністю чи не схильністю до ризику.

Слід виділити основні постулати стосовно ризику:

- всеосяжність ризику;
- ризиком обтяжені передбачення, прогнози;
- ризик виникає в процесах цілепокладання, оцінювання;
- ризик необхідно кількісно вимірювати і оцінювати;
- структура та міра ризику діалектично змінюється в часі під впливом змін зовнішнього та внутрішнього середовища, дії низки обєктивних і субєктивних чинників.
- вимірювання ризику грунтується на загально-методологічних положеннях теорії вимірювання, яка складає фундамент будь-яких вимірювань.

На основі викладених постулатів дамо визначення ризику.

Ризик-це діяльність, повязана з подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, у процесі якого є можливість кількісно і якісно визначити імовірність досягнення передбачуваного результату, невдачі і відхилення від мети.

Ризик можна розуміти: як стан і як дію.

Як стан – це нестабільність, невизначеність, невпевненість у майбутньому.

Ризик як дія – це поведінка субєкта в умовах нестабільності.

Ми можемо приймати рішення, що зменшують ризик, але повністю виключити економічний ризик неможливо. Отже, економічна діяльність в умовах ринку без ризику неможлива. При цьому стоїть основне завдання керувати ризиком, зведення його до мінімуму.

Важливим етапом дослідження і вивчення ризику є розробка методик, розробка механізму контролю та керування економічним ризиком. Ці дослідження базуються на принципах системного аналізу.

Системний аналіз – це методологія дослідження об'єктів з метою визначення найбільш ефективних методів керування ними.

Елементами ризику є: об'єкт, суб'єкт, джерело.

Об'єктом ризику називають економічну систему, оцінити ефективність та умови функціонування котрої на перспективу у вичерпній повноті та з необхідною точністю неможливо.

Суб'єктом ризику – особа або колектив, які заінтересовані в результатах управління об'єктом ризику і мають відповідну компетенцію щодо такого управління та прийняття відповідних рішень стосовно об'єкта ризику.

Джерела ризику – це процеси і явища, які спричиняють невизначеність, конфліктність.

1.2. Складові економічного ризику.

Під економічним ризиком розуміють такий вид ризику, який виникає при будь-яких видах підприємницької діяльності, спрямованих на одержання прибутку і пов'язаних з виробництвом продукції, реалізацією товарів, наданням послуг, виконанням робіт; товарно-грошовими і фінансовими операціями; комерцією, а також реалізацією науково-технічних проектів.

Сутність економічного ризику становлять такі елементи:

- можливість відхилення від передбачуваної мети, заради якої здійснювалася обрана альтернатива;
- імовірність досягнення бажаного результату;
- відсутність впевненості в досягненні поставленої мети;
- можливість матеріальних, моральних та інших утрат, пов'язаних зі здійсненням обраної в умовах невизначеності альтернативи.

Важливим елементом економічного ризику є наявність імовірності відхилення від обраної мети. При цьому можливі відхилення як негативного, так і позитивного характеру. Зазначені елементи, їхній взаємозв'язок і взаємодію відбивають змістовність економічного ризику.

Поряд з цим економічному ризику притаманні ряд рис, що сприяють розумінню його змісту. Можна виділити такі основні риси економічного ризику:

- суперечливість;
- альтернативність;
- невизначеність.

Суперечливість як риса економічного ризику виявляється в різних аспектах. Являючи собою різновид діяльності, економічний ризик орієнтований на одержання значимих результатів неординарними новими способами в умовах невизначеності і в ситуації неминучого вибору. Тим самим він дає можливість переборювати консерватизм, догматизм, психологічні бар'єри, що перешкоджають впровадженню нових, перспективних видів діяльності, стереотипи, що виступають гальмом суспільного розвитку, і забезпечує здійснення ініціатив, новаторських ідей, різних експериментів, спрямованих на досягнення успіху. Ця особливість ризику має важливі економічні, політичні і духовно-моральні наслідки, тому що прискорює суспільний і технічний прогрес, впливає на суспільну думку, духовну атмосферу суспільства.

З іншого боку, економічний ризик веде до авантюризму, волюнтаризму, суб'єктивізму, до певних соціально-економічних і матеріальних витрат, якщо в умовах неповної інформації, чи в ризиковій ситуації альтернатива вибирається без належного урахування об'єктивних закономірностей розвитку події, стосовно якої приймається рішення.

Суперечлива природа економічного ризику виявляється в зіткненні об'єктивно існуючих ризикованих дій і суб'єктивною оцінкою. Так, один підприємець, який робить вибір, здійснює певні дії, може вважати їх ризикованими, а інші люди їх можуть розцінювати як обережні, позбавлені всякого ризику, і навпаки.

Альтернативність пов'язана з тим, що вона припускає необхідність вибору з двох чи декількох можливих варіантів рішень, дій. Відсутність можливості вибору знімає питання про наявність економічного ризику. Там, де немає вибору, не виникає ризикова ситуація і, отже, не буде ризику.

Залежно від конкретного змісту ситуації ризику альтернативність має різний ступінь складності і зважується різними способами. Якщо в простих ситуаціях вибір здійснюється, як правило, на засадах минулого досвіду й інтуїції підприємця, то в складних ситуаціях необхідно додатково використовувати спеціальні методи і методики.

Невизначеність виступає джерелом виникнення економічного ризику. Відзначимо, що ризик є одним із засобів зняття невизначеності, що виникає через невірогідність інформації і відсутність однозначності. Акцентувати увагу на цій властивості ризику важливо у зв'язку з тим, що оптимізу-вати на практиці процеси управління і регулювання, ігноруючи об'єктивні та суб'єктивні джерела невизначеності, безперспективно. Причому йдеться не про те, щоб знайти засіб, який дозволяє цілком позбутися впливу факторів невизначеності (що практично, мабуть, нездійсненне), а про необхідність урахування ризику з метою вибору раціональних альтернатив.

Дамо означення таким елементам ризику, як об'єкт та суб'єкт економічного ризику.

Об'єктом економічного ризику виступає керована економічна систему, ефективність та умови функціонування якої наперед точно невідомі.

Під суб'єктом економічного ризику розуміється підприємець, керівник або колектив, які зацікавлені в результатах управління об'єктом ризику і мають компетенцію приймати рішення щодо об'єкта ризику.

1.3. Функції та джерела економічного ризику.

Зміст ризику як економічної категорії зумовлює його основні функції, що виконуються в процесі підприємницької діяльності:

- інноваційну;
- регулятивну;
- захисну;
- аналітичну

Інноваційна функція ризику стимулює пошук нетрадиційних рішень проблем, що стоять перед підприємцем. Ризикові рішення, ризиковий тип господарювання приводять до більш ефективного виробництва, від якого виграють і підприємці, і споживачі, і суспільство в цілому.

Регулятивна функція має суперечливий характер і виступає в двох формах: конструктивній і деструктивній. У першому випадку — коли властивість ризикувати — один зі шляхів успішної діяльності. Однак ризик може стати проявом авантюризму, суб'єктивізму, якщо рішення приймається в умовах неповної інформації, без належного урахування закономірностей розвитку явища. У цьому випадку ризик виступає як дестабілізуючий фактор.

Захисна функція полягає в наступному. Якщо для підприємця ризик — природний стан, то нормальним повинне бути і терпиме відношення до невдач. Ініціативним, заповзятливим підприємцям потрібний спеціальний захист, правові, політичні й економічні гарантії, що виключають покарання і стимулюють виправданий ризик.

Аналітична функція ризику зв'язана з тим, що наявність ризику передбачає необхідність вибору одного з можливих варіантів рішення, у зв'язку з чим підприємець у процесі прийняття рішення аналізує всі можливі альтернативи, вибираючи найбільш рентабельні (прибуткові) і найменш ризиковані.

Існують різні точки зору з приводу об'єктивної і суб'єктивної природи економічного ризику. Розглядають три

сторони ризику: суб'єктивна, об'єктивна і суб'єктивно-об'єктивна.

Суб'єктивна сторона (природа ризику) проявляється в тому, що підприємці неоднаково сприймають одну й ту саму величину економічного ризику в силу розходження психологічних, моральних, ідеологічних принципів орієнтації, установок. Крім того,'економічний ризик завжди пов'язаний з вибором певних альтернатив, розрахунком ймовірностей їх результату.

Об'єктивна сторона проявляється в тому, що це поняття відображує реально існуючі явища, процеси, сторони діяльності, причому економічний ризик існує незалежно від того, усвідомлює підприємець його наявність чи ні, враховує чи ігнорує його.

Суб'єктивно-об'єктивна сторона визначається тим, що економічний ризик породжується як суб'єктивними процесами, так і тими, які не залежать від волі чи свідомості підприємця.

Виходячи з вищесказаного, виділимо основні джерела економічного ризику, до яких відносяться:

- спонтанність природних процесів і явищ, стихійні лиха;
- випадковість подій;
- наявність різних тенденцій, зіткнення суперечливих інтересів (наприклад, конкуренція);
- імовірний характер науково-технічного прогресу;
- неповнота і невірогідність інформації про об'єкт, явище;
- обмеженість і недостатність ресурсів;

- неможливість однозначного пізнання об'єкта, процесу, явища;
- відносна обмеженість свідомості діяльності підпри ємця, розбіжності в соціально-психологічних установ ках, оцінках, стереотипах поведінки;
- незбалансованість основних компонентів господарс кого механізму.

Визначимо необхідні умови виникнення економічного ризику.

Насамперед, ризик виникає лише тоді, коли має місце невизначеність, відсутність вичерпної інформації про умови прийняття рішень. Якщо все відомо — ризик відсутній. Тільки при багатоваріантності майбутнього, наявності елементів не-передбаченості можна казати про наявність ризику. Так, при абсолютній впевненості у недоторканості внеску його власнику не спаде на думку застрахувати внесок. Отже, невизначеність є однією з причин виникнення ризику.

Під невизначеністю розуміється наявність неповної інформації про умови прийняття господарських рішень, а не відсутність будь-якої.

Наявність економічного ризику є певна ознака зрілості економіки, її розвинутості. В економіці з низьким рівнем виробництва траєкторія її розвитку практично детермінована стратегією виживання, суворою необхідністю забезпечення мінімальних потреб населення. Якщо ж відсутні альтернативи рішень, то й відсутній ризик. Отже, ризик може існувати лише за умови активного управління та регулювання економікою.

Ризик відсутній також у випадку, коли немає зацікавленості в результатах прийняття рішень. Припустимо, що питання про набір на спеціальність вирішує колектив кафедри. Якщо співвідношення між "попитом" на фахівців даної спеціальності та їх випуском не впливає на життєдіяльність колективу кафедри, то кожен з її членів нічим не ризикує. Таким чином, економічний ризик можливий лише тоді, коли керована економічна система функціонує в умовах невизначеності, а особа, яка приймає рішення, зацікавлена в кінцевому результаті.

2. Класифікація ризиків.

Тенденція до ускладнення соціально-економічних процесів породжує появу все нових видів і типів ризику. Розрізняють два ти ризику: динамічний і статистичний.

Динамічний – це ризик, пов'язаний з непередбачуваними змінами вартості основного капіталу внаслідок прийняття управлінських рішень.

Статистичний – це ризик, пов'язаний із скороченням реальних активів внаслідок втрати частки власності, а також скороченням доходу через недієздатність організації.

У процесі своєї діяльності підприємці зіштовхуються із сукупністю різних видів ризиків, які відрізняються між собою за місцем виникнення, сукупністю зовнішніх і внутрішніх факторів, що вливають на їх рівень. Всі ризики взаємозалежні. Розглянемо загальну класифікацію ризиків.

За характером обліку ризики бувають:

Зовнішні — пов'язані зі спричиненням збитків і неотриманням підприємцем очікуваного прибутку внаслідок порушення своїх зобов'язань контрагентами підприємця або через інші обставини, які не залежать від нього.

Зовнішні ризики поділяють на :

- природні (ризик стихійних лих і екологічні ризики);
- загальноекономічні (ризик зміни економічної ситуації, ризик несприятливої кон'юктури ринку, податкові ризики, ризик посилення конкуренції і галузевий ризик);
- політичні (ризик націоналізації й експропріації, ризик розриву контракту, ризик воєних дій і цивільних заворушень);
- фінансові ризики, повязаня з купівельною спроможністю грошей;

Внутрішні залежать від здатності підприємця організовувати виробництво і збут продукції, або це діяльність самого підприємства і його контрактної аудиторії.

До внутрішніх ризиків належать:

- виробничі (ризики зниження продуктивності праці, втрати робочого часу, перевитрати або відсутність матеріалів);
- технічні (ризики при впровадження нових технологій, або збоїв і виходу з ладу устаткування);
- комерційні
- інвестиційні.

В залежності від можливого результату ризики можна розділити на дві великі групи: чисті і спекулятивні.

Чисті ризики означають можливість одержання негативного чи нульового результату. До них належать: природні (пов’язані з проявом стихійних сил природи), екологічні (пов’язані із забрудненням навколишнього середовища), політичні (пов’язані з політичною ситуацією і країні і діяльністю держави), транспортні (зв’язані з перевезеннями вантажів транспортом) і частина комерційних ризиків.

Спекулятивні ризики полягають у можливості одержання як позитивного, так і негативного результату. До них належать фінансові ризики, які є частиною комерційних ризиків.

Класифікація комерційних ризиків.

Комерційні ризики означають небезпеку втрат у процесі фінансово – господарської діяльності. За структурною ознакою розрізняють:

Фінансові – це ризики, пов’язані зі збитками від зупинки виробництва, або від впровадження нових технологій.

Торгові – це ризики. Пов’язані зі збитками через затримку платежів, відмову від платежу в період транспортування товару, недопоставки товару тощо.

Фінансові ризики пов’язані з імовірністю втрат фінансових ресурсів.

Розглянемо ризики пов’язані з купівельною спроможністю грошей.

Інфляційний – при зростанні інфляції одержувані грошові доходи знецінюються з точки зору реальної купівельної спроможності швидше ніж зростають.

Дефляційний - при зростанні дефляції відбувається падіння рівня цін, погіршення економічних умов підприємництва і зниження доходів.

Валютний – небезпека валютних втрат внаслідок зміни курсу однієї іноземної валюти відносно іншої при проведенні зовнішньоекономічних операцій.

Ризик ліквідності – пов'язаний з можливістю втрат при реалізації цінних паперів, товарів, або через зміну оцінки їхньої споживчої вартості.

Інвестиційний –втрати при вкладання грошей в проекти. Інвестиційні ризики поділяють на:

- ризик втраченої вигоди – це ризик настання побічних фінансових збитків у результаті нездійснення якого-небуть заходу;
- ризик зниження прибутковості – це ризик, який може виникнути в результаті зменшення розміру відсотків і дивідендів з портфельних інвестицій, з внесків і кредитів.

Ризик зниження прибутковості містить в собі такі різновиди:

Процентний – втрати пов’язані з підвищенням чи зниженням відсоткової ставки.

Кредитний – небезпека несплати позичальником основного боргу і відсотків, які належати кредитору.

2.3 Види ризиків.

Вид ризику визначається видом економічної діяльності.

Країнові ризики виникають при здійснені підприємцями й інвесторами своєї діяльності на території іноземних держав.

Політичний ризик – можливість виникнення збитків у зв’язку з можливими змінами в курсі політики уряду, зміни законодавства.

Технічний ризик визначається ступенем організації виробництва, заходами безпеки, можливістю проведення ремонту устаткування.

Страховий ризик – це ризик, який може бути оцінений з точки зору імовірності настання страхового випадку і кількісних розмірів можливих збитків.

Підприємницький – це ризик який виникає при будь-яких видах діяльності, пов'язаний з виробництвом продукції, товарів, послуг, комерцією, фінансовими операціями, здійсненням різних проектів.

Господарський - ризик пов'язаний з господарською діяльністю, орієнтованою на одержання прибутку на основі задоволення потреб і запитів покупців відповідно до вимог ринку.

Комерційний - ризик пов'язаний з комерційною діяльністю.

Фінансовий - ризик пов'язаний з фінансовою діяльністю. Виникає при здійсненні фінансових угод (в ролі товару виступає капітал, цінні папери, валюта).

Кредитний - непевненість кредитора в тому, що боржник збереже намір виконати свої зобов'язання у відповідності з термінами й умовами кредитної угоди.

Банківський – при здійсненні банківських операцій, що призводять до відхилення фактичних результатів від очікуваних.

2.4 Аспекти управлінської діяльності/

Сутність основних напрямів управлінської діяльності:

Управління за результатами – прихильники даного процесу управління виокремлюють три основних етапи:

- визначення бажаних результатів;
- управління залежно від ситуації;
- контроль за результатами.

Управління за цілями – надає можливість оцінювати керівників на підґрунті міри досягнення цілей. Прихильники даного процесу виділяють чотири основних етапи:

- вироблення чітких, лаконічних формувань сутності цілей;
- розробка реалістичних планів їх досягнення;
- системний контроль, вимірювання та оцінка роботи і результатів;

- коригуючи засоби для максимально можливого досягнення запланованих цілей.

<u>Управління за відхиленями</u> – ґрунтується на виявленні і доведенні до відома керівника тільки тієї інформації, що обов’язково вимагає його уваги.

Передумови успішного попередження проблем в управлінській діяльності:

1. правильне розуміння важливості недопущення помилок;
2. прагнення до усунення помилок;
3. навчання методам вирішення проблем;
4. аналіз причини виникнення проблем;
5. система моніторингу проблем та оцінювання ефективності превентивних заходів.

Для опису причинно-наслідкового аналізу необхідно провести розпізнання причини, і зібравши необхідну інформацію зробити поетапний аналіз.

Перший етап: формулювання проблеми (виявляють об’єкт, підрозділ чи людину, які створюють труднощі та яких необхідно усунути).

Другий етап: опис проблеми.

Третій етап: виявлення відміностей, які створюють проблему (необхідно виявити причину).

Четвертий етап: виявлення змін (потрібно виокремити релевативні (найважливіші) зміни).

П’ятий етап: виявлення можливих причин (яким чином дана зміна могла створити проблему).

Шостий етап: перевірка найбільш імовірних причин (чи не суперечить дана причина фактам розглядуваної ситуації).

Сьомий етап: підтвердження найбільш імовірної причини (використовують причино-наслідковий аналіз для виявлення проблеми ,що виникла).

Наявність ризику в процесі діяльності як обов’язкового атрибуту – об’єктивний економічний закон. В умовах ринкової економіки неможливо управляти підприємством без урахування ризику, а для ефективного управління важливо не лише знати про його наявність, а й правильно ідентифікувати та структурувати ризики. Важливо враховувати, що існують аспекти управлінської діяльності, де постійно створюються ризиковані ситуації.

Управління ризиками – це необхідність використовувати в управлінській діяльності різноманітні підходи, процеси, заходи, які дозволяють певною мірою прогнозувати можливість настання ризикованих подій і домагатися зниження ступення ризику до допустимих меж.

Визначимо основні принципи процесу управління ризиками.

1. Принцип максимізації – передбачає прагнення до найширшого аналізу можливих причин і чинників виникнення ризику. Цей принцип наголошує на необхідності зведення рівня невизначеності до мінімуму.
2. Принцип мінімізації - управлінці намагаються звести до мінімуму спектр можливих ризиків і мінімізувати ступінь впливу ризику на свою діяльність.
3. Принцип прийняття – управлінці можуть прийняти на себе тільки обґрунтований ризик.

Для процесу управління ризиком працівникам апарату управління необхідно передусім навчитись прогнозувати виникнення тих чи інших проблем і відповідних ситуацій.

Прогноз – можливі судження про можливі сценарії об’єкта управління в майбутньому, альтернативність траєкторії і терміни існування.

В процесі управління ризиком можна виокремити такі рішення:

1. за вибором цілей управління ризиком;
2. за виборів методів;
3. підтримки балансу в трикутнику “люди-ресурси-цілі” в процесі досягнення обтяжених ризиком цілей за допомогою обраного інструментарію управління ним.

Можливість альтернативних рішень висуває перед менеджером завдання оптимізації розподілу ресурсів між такими заходами:

1. попередження ризику усуненням його джерела;

2. зниження ризику за допомогою зменшення інтенсивності небажаних факторів чи вразливості об’єктів, які можуть бути піддані впливу несприятливих чинників.
3. відшкодування збитків ризику. Укладають договір фондового страхування.

Зниження ризику можливе:

1. на етапі планування операції чи проектування зразків – введення додаткових елементів надійності та інших необхідних заходів;
2. на етапі прийняття рішення – використання відповідних критеріїв оцінки ефективності рішення;
3. на етапі експлуатації відповідних систем – за рахунок додержання режимів експлуатації та контролю.

За прогнозною ефективністю в управлінні ризиками можна виокремити: ординарні, синергетичні, асинергетичні варіанти рішень і систем.

Ординарні варіанти ризикових рішень – це такі варіанти рішень, за яких ефективність витрати ресурсів на одиницю одержаного ефекту в управлінні ризиком відповідає нормам і нормативам, прийнятим для певної галузі, виду діяльності.

Синергетичні варіанти ризикових рішень – це такі варіанти рішень. За яких ефективність витрати ресурсів в управлінні ризиком різко зростають.

Асинергетичними називають варіанти рішень, які не дозволяють одержати бажаного ефекту від інвестованих в управління ризиками коштів.

Прийняття рішення ґрунтується на використанні різних формалізованих і неформалізованих методів.

3.Кількісні оцінки економічного ризику.

3.1 Ризик в абсолютному виразі.

Виправданий ризик – атрибут стратегії і тактики ефективної економічної діяльності.

У кожній ситуації, що пов'язана з ризиком виникає питання: «що означає виправданий ризик і де проходить межа яка відділяє допустимий ризик від авантюри?» дати відповідь на ці питання, значить знайти рівень «прийнятого ризику», кількісну та якісну оцінки конкретних ризикових рішень.

Кількісну оцінку ризику проводять на підставі імовірнісних розрахунків. Кількісні значення ризику обчислюються у відносних і в абсолютних величинах, що виражають міру невизначеності під час реалізації прийнятого рішення.

Ступінь ризику може оцінюватись сподіваними збитками, що спричинені цим рішенням; та імовірністю, з якою ці збитки можливі.

Якщо малоімовірно, що будуть несприятливі наслідки – ризик малий, і мала імовірність помилки велика то збитки малі.

У ряді випадків ризик дорівнює добуткові сподіваних збитків на імовірність того, що ці збитки відбудуться.

Імовірність настання певної події може бути визначена: об'єктивним методом, що ґрунтується на обчислені частоти, з якою відбувається певна подія, і суб'єктивний метод, який спирається на використанні суб'єктивних оцінок та критеріїв, що ґрунтуються на припущеннях.

Ризик в абсолютному виразі може визначатися сподіваною величиною можливих збитків, і як міру ризику використовують середньоквадратичне відхилення.

Існує проста методика визначення коефіцієнта ризику щодо короткотермінового прогнозу:

p— імовірність достовірного прогнозу, то:

$1–p$ — імовірність, що він не відбудеться.

В абсолютному виразі ступінь ризику, може визначатися, як добуток імовірності невдачі *($p_н$)* на величину цих небажаних наслідків *(х)*.

$$w = p_H x \qquad (3.1.1.)$$

Де:

w — величина ризику;

p_H — імовірність небажаних наслідків, що обчислюється на базі статистичних даних,

x — величина цих наслідків.

Сподіване значення (математичне сподівання), що пов’язане з невизначеною ситуацією, є середньозваженою усіх можливих результатів, де імовірність кожного із них використовується як частота або питома вага, відповідного значення. Сподівання значення вимірює результат (ризик), котрий ми очікуємо в середньому.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини x називають суму добутків її можливих значень та відповідних ймовірностей.

$$m = M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \qquad (3.1.2)$$

Де:

x_i — значення випадкової величини; i=1,2…

p_i — відповідні імовірності.

Для обмеженого *(n)*

$$m = M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (3.1.3)$$

Якщо випадкова величина х неперервна то:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad (3.1.4)$$

або:

$$M(x)=\int_a^b xf(x)dx \qquad 3.1.5$$

Якщо неперервна випадкова величина визначена на інтервалі [a, b], $f(x)$ – густина розподілу.

Розглянемо приклад на визначення ризику, як математичне сподівання втрат.

Приклад: Підприємство освоює новий вид товару. При цьому можливі збитки, як результат не досить вивченого ринку збуту під час маркетингових досліджень. Імовірні три варіанти щодо попиту на продукцію. Збитки при цьому складатимуть:

X_i	500	700	–600
p_i	0,2	0,4	0,4

Визначити сподівану величину ризику, тобто збитків.

Розв'язання: Розв'язуємо за формулою (3.1.2)

$W=M(x)=500\cdot0{,}2+700\cdot0{,}4+(-600\cdot0{,}4)=140$ гр.од.

Дисперсією випадкової величини *x* яку позначають *D(x)* називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини *x* від математичного сподівання *M(x)*. Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно *M(x)*.

$$D(x)=M(x^2)-(M(x))^2 \qquad 3.1.6$$

Для дискретної випадкової величини x

$$D^2(x)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(x))^2 \qquad 3.1.7$$

Кращим буде той варіант, де дисперсія менша. Дисперсія дає більш стабільний результат.

Розглянемо приклад визначення ризику, як дисперсії.

Приклад: Нехай працівник має пропозицію вибору двох місць роботи. Потрібно вибрати одне з них на основі такої інформації.

Місце роботи	I варіант		II варіант	
	імовірність	дохід	імовірність	дохід
А	0,5	100	0,5	200
Б	0,4	90	0,6	190

Розв'язання:

$$D(x)=M(x^2)-(M(x))^2$$

Визначимо *M(x)*- сподіваного доходу для кожного місця роботи:

$M(x_a)$=100·0,5+200·0,5=150 гр.од.

$M(x_в)$=90·0,4+190·0,6=150 гр.од.

Отже, середні доходи однакові.

Знаходимо *D* доходів для кожного місця роботи:

$$M(x^2)=\sum_{n=1}^{n} x_i^{\,2} p_i$$

$M(x_a^2)$=100^2·0,5+200^2·0,5=25000 гр.од.

$D(x_a)$=25000-150^2=25000–22500=2500 гр.од.

Тепер шукаємо для Б:

$M(x_b)$=90^2·0,4+190^2·0,6=24900 гр.од.

$D(x_b)$=24900–150^2=2400

Висновок: Потрібно вибирати місце роботи Б, тому що *D* для нього менша.

Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma=\sqrt{D(x)} \qquad 3.1.8$$

3.2 Ризик у відносному вираженні.

Ризик у відносному вираженні може визначатися як відношення можливих збитків до деякої базової величини: (обсяг майна підприємства, загальні витрати ресурсів або сподіваний прибуток).

Якщо під ризиком розуміти ризик банкрутства, то він визначається не лише коливанням курсу цінних паперів, але й власним наявним капіталом:

Ризик вимірюють за допомогою коефіцієнта:

$$W = \frac{x}{K} \qquad 3.2.1$$

Де:

x — максимально можливий обсяг збитків;

W— коеф.ризику;

K — обсяг власних фінансових ресурсів.

Приклад: Один з наших емігрантів заощадив 10 тис.$, взяв в борг ще 40 тис.$, під 10 % річних, і вклав усі 50 тис.$ в акції однієї компанії розраховуючи на річне зростання курсу в 20 %.Курс почав падати, і коли він знизився на 40% він продав ненадійні акції. В результаті цього він повернув 30 тис.$, понісши при цьому збитки 24 тис.$. Його знайомий американець вклав 50 тис.$, і повернув 30 тис.$. Визначити ступінь ризику для американця і емігранта.

Розв'язання:

Збитки:

американця	емігранта
x_a=20 тис.$	$x_{ем}$=24 тис.$
K_a=50 тис.$	$K_{ем}$=10 тис.$
$W_a = \frac{20}{50} = 0{,}4$	$W_{ем} = \frac{24}{10} = 2{,}4$

Тобто,ступінь ризику для емігранта в 6 раз більший від американця.

Ризик може визначатись також, як коефіцієнт варіації відповідного економічного показника.

$$V(X)=\frac{\sigma(x)}{M(x)}*100 \qquad 3.2.2$$

Він потрібен, коли сподівані доходи одного проекту відрізняються від сподіваних доходів іншого проекту. В такому випадку важко порівнюти абсолютні показники дисперсії. Необхідно визначити (або виміряти) ризикованість проекту відносно сподіваних доходів і мірою цього є коефіцієнт варіації або співвідношення ризику і доходу.

<u>Приклад:</u> Є два види акцій. Ефективність їх є випадковою велииною і залежить від стану економічного середовища. Сподівана ефективність цих акцій одинакова. Вважають, що на ринку можуть виникнути дві ситуації.

Q_1 – з $p_1=0,2$

Q_2 – з $p_2=0,8$.

Різні акції реагують на ці ситуації порізному. Курс акцій першого виду у ситуації Q_1 зростає на 5%, у ситуації Q_2 на 1,25%. Курс акцій другого виду у ситуації Q_1 падає на 1%, а у ситуації Q_2 зростає на 2,75%.

Припустимо. Що інвестор взяв гроші в борг під 1,5% річних. Які акції слід придбати?

Розв'язання: знайдемо доходи:

$M_1=5\%\cdot 0,2+1,25\%\cdot 0,8=2\%$

$M_2=-1,0\%\cdot 0,2+2,75\%\cdot 0,8=2\%$

Дисперсію

$$D_1=(5-2)^2*0,2+(1,25-2)^2*0,8=2,25$$

$$D_2=(-1-2)^2*0,2+(2,75-2)^2*0,8=2,25$$

Відсоток, під який можна взяти борг дорівнює 1,5%, а сподівана ефективність дорівнює 2%. Отже, є резон брати гроші в борг.

Якщо інвестор вкладе гроші в акції першого виду і реалізується ситуація Q_1, то він виграє: 5%–1,5%=3,5%, якщо акції другого, то збанкрутує: –1%-1,5%=–2,5%

Коли відбудеться ситуація Q_2, то:

акції першого виду: 1,25%–1,5%=-0,25%

акції другого виду: 2,75%–1,5%=1,25%

Оскільки, стани еконеомічного середовища Q_1, Q_2 мають різну імовірність, рішення інвестора не є рівнозначне з точки зору ризику банкрутства: при вкладанні грошей в акції першого виду банкрутство можливе з $p_1=0,8$ в другому випадку- $p_2=0,2$.

Таким чином при однаковості сподіваних ефективностей та дисперсій, а також власного початкового капіталу, ризик банкрутства може бути різним.

У даному випадку, слід обрати той вид акцій, імовірність банкрутства яких у зв’язку з неспиятливим станом середовище буду меншою:

Отже інвестору слід придбати акції другого виду.

Тут імовірність несприятливого стану економічного середовища виступає, як міра ризику.

В загальному випадку:

$$\begin{aligned} M_1 > M_2,\ але\ D_1 > D_2 \\ M_1 < M_2,\ але\ D_1 < D_2 \end{aligned} \qquad 3.2.3$$

або це залежить від схильності до ризику суб’єкта ризику – особи, що приймає рішення .

<u>Приклад</u>

Торгова фірма одержує вироби від трьох постачальників. Перший дає 1% браку, другий 2%, третій 3%.

Потрібно визначити частку продукції від кожного постачальника і з умови рівності ризиків торгової фірми відносно кожного з них, визначити загальнай ризик торгової фірми:

Оскільки вся інформація має імовірносний характер, то ризик визначаємо також як імовірність деякої події (реалізація браковоного виробу);

Введемо такі події: *A*— фірма реалізує бракований виріб;

p_1 — проданий виріб від першого постачальника,

p_2 — проданий виріб від другого постачальника,

p_3 — проданий виріб від третього постачальника.

Оскільки є три гіпотези, то використаємо формулу:Байєса;

$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A),} \qquad 3.2.4$$

якщо подія А вже відбулася, тоді:

$$\boldsymbol{P_A(B_i) = \frac{P(B_1) * P_{B_i}(A)}{P(A)}} \qquad 3.2.5$$

Позначимо через x_1— частку виробів від першого постачальника.

x_2— другого, $(1–x_1–x_2)$- третього. Оскільки ризики рівні, то $P_f(B_1) = P_f(B_2) = P_f(B_3)$. На основі формули Байєса і рівності ризиків одержимо таку систему рівнянь:

$$P(B_1)P_{B_1}(A) = P(B_2)P_{B_2}(A)$$
$$P(B_1)P_{B_1}(A) = P(B_3)P_{B3}(A)$$

$0{,}01x_1=0{,}02x_2$ (*)100

$0{,}01x_1=0{,}03(1-x_1-x_2)$

$x_1=6/11$, $x_2=3/11$, $x_3=2/11$.

Висновок: із кожних 11 одержаних виробів 6 — від першого виробника, 3 — від другого, 2 — від третього. Загальний ризик:

$$P(A) = \frac{6}{11}0.01 + \frac{3}{11}0.02 + \frac{2}{11}0.03 = \frac{18}{1100}$$

Із одержаних 1100 виробів 18 буде бракованих.

<u>Приклад</u> 1.1

Якщо відомо, що при вкладенні капіталу в з проект *A* із 160 випадків прибуток у 13,5 тис. грн. був отриманий в 60 випадках, прибуток у 22 тис. грн. – у 51 випадках, і прибуток у 12 тис. грн. – у 49 випадках, то середнє значення виразиться:

$$M = \overline{X} = \sum X_i P_i$$

$$X_1 = 13{,}5 \qquad p_1 = \frac{60}{160} = 0{,}375$$

$$X_2 = 22 \qquad p_2 = \frac{51}{160} = 0{,}319$$

$$X_3 = 12 \qquad p_3 = \frac{49}{160} = 0{,}306$$

$$M = (13{,}5 \cdot 0{,}375) + (22 \cdot 0{,}319) + (12 \cdot 0{,}306) = 15{,}752$$

Аналогічно буде знайдено, що при вкладенні капіталу в проект *Б* середній прибуток становив 20 тис. грн.

$$\{(15 \cdot 0{,}3) + (20 \cdot 0{,}5) + (27{,}5 \cdot 0{,}2)\} = 20000$$

Порівнюючи дві суми очікуваного прибутку при вкладенні капіталу в заходи *А* і *Б*, можна зробити висновок, що при вкладенні в захід *А* величина одержуваного прибутку коливається від 13,5 до 22 тис. грн. і середня величина становить 15,752 тис. грн.; при вкладенні капіталу в захід *Б* величина одержуваного прибутку коливається від 15 до 27,5 тис. грн. І середня величина становить 20 тис. грн.

Однак для прийняття рішення необхідно так само виміряти коливання показників, тобто визначити міру мінливості можливого результату.

Коливання можливого результату являє собою ступінь відхилення очікуваного значення від середньої величини.

Для цього на практиці звичайно застосовують два близько пов'язаних критерії: „дисперсію" і „середньоквадратичне відхилення".

Дисперсія – середнє зважене з квадратів відхилень дійсних результатів від середньо-очікуваних

$$D(x) = \sum p_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum \left(x_i - M(x)\right)^2 \cdot p_i$$

Середньоквадратичне відхилення – це корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma = \sqrt{D(x)}.$$

Дисперсія та середньоквадратичне відхилення служать мірами абсолютного коливання і вимірюються в тих фізичних одиницях, що й ознака, яка варіює. Для аналізу звичайно використовуються коефіцієнт варіації.

Коефіцієнт варіації являє собою відношення середньоквадратичного відхилення до середнього значення і показує ступінь відхилення отриманих значень:

$$V = \frac{\sigma}{M} \text{ або } V = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

Коефіцієнт варіації – відносна величина, тому на його розмір не впливають абсолютні значення досліджуваного показника.

За допомогою коефіцієнта варіації можна порівнювати навіть коливання ознак виражених у різних одиницях виміру. Чим більший коефіцієнт, тим сильніше коливання.

В економічній статистиці встановлена така оцінка різних значень коефіцієнта варіації:

до 10% - слабке коливання;

до 10% – 25% – помірне;

понад 25% - високе.

Відповідно, чим вище коливання, тим більший ризик.

<u>Приклад</u> 1.2.

Є можливість вибору виробництва та реалізації двох наборів товарів широкого вжитку з однаковим сподіваним доходом (150 млн. грн.). За даними відділу маркетингу, яким були проведені обстеження ніші ринку, доход від виробництва та реалізації першого набору товарів залежить від конкретної імовірнісної економічної ситуації. Мають місце два рівнозначно ймовірних доходи: 180 млн. грн., за умови вдалої реалізації першого набору товарів, і 140 млн. грн., коли результати менш вдалі. Доход від реалізації другого набору товару дорівнює в одному випадку 161 млн. грн., але не виключена можливість малого попиту на цю продукцію, коли доход буде дорівнювати всього 61 млн. грн.

Розв'язування:

У табл.1. зведені результати та їх імовірності, одержані відділом маркетингу.

Таблиця 1.

Порівняння варіантів виробництва та реалізації товарів.

Варіанти виробництва та реалізації товарів	Результат 1		Результат 2	
	Імовірність (p_1)	Доход X_1 (млн. грн.)	Імовірність (p_2)	Доход X_2 (млн. грн.)

Перший	0,5	180	0,5	140
Другий	0,99	161	0,01	61

Необхідно оцінити ступінь ризику та прийняти рішення щодо випуску одного з двох наборів товарів.

Обчислимо математичне сподівання для кожного з варіантів:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2=180\cdot 0{,}5+140\cdot 0{,}5=160\ \text{млн. грн.}$$

$$M(Y)=y_1p_1+y_2p_2=161\cdot 0{,}99+61\cdot 0{,}01=160\ \text{млн. грн.}$$

Відзначимо, що обидва варіанти мають однаковий сподіваний доход, тому що $M(X)=M(Y)=160$ млн. грн. Але мінливість результатів не однакова. Цю мінливість можна прийняти як ступінь (міру) ризику та обчислити за допомогою дисперсії (дисперсія результатів використовується як міра ризику).

Для першого набору товарів:

$$D=(180-160)^2\cdot 0{,}5+(140-160)^2\cdot 0{,}5=400$$

Для другого набору товарів:

$$D=(161-160)^2\cdot 0{,}99+(61-160)^2\cdot 0{,}01=1{,}98$$

Оскільки ступінь ризику, що пов'язаний із випуском і реалізацією товарів широкого вжитку, за першим варіантом більший, ніж за другим, то другий варіант є менш ризикованим, ніж перший. Такий же результат отримаємо, приймаючи за міру ризику середньоквадратичне відхилення.

Приклад 1.3.

Дещо змінимо умови прикладу 1.2., що наведені у табл. 1. Припустимо, що для першого варіанту доход, виріс на 10 млн. грн., для кожного з результатів, що розглядаються, тобто $x_1=190,\quad x_2=150$. Решта даних залишилася незмінною. Оцінити ступінь ризику та прийняти рішення щодо випуску одного з двох наборів товарів широкого вжитку.

Розв'язування:

Для першого варіанту виробництва та реалізації товарів широкого вжитку сподіване значення доходу дорівнює:

$$M(x)=170\ \text{млн. грн.}$$

$$\sigma^2(x)=400\ (\text{млн. грн.})^2$$

Для другого варіанту відповідно:

$$M(y)=160\ \text{млн. грн.}$$

$$\sigma^2(y)=1{,}98\ (\text{млн. грн.})^2$$

Як вчинити у цьому випадку? Тут важко порівнювати абсолютні показники дисперсії.

У таких випадках варто перейти до відносних величин щодо показника ризику:

$$V=\frac{\sigma(x)}{M(x)}.$$

У нашому випадку:

$$V(x)=\frac{20}{170}=0{,}12$$

$$V(x)=\frac{1{,}4}{160}=0{,}009$$

Оскільки $V(x)>V(y)$, то другий варіант є менш ризикованим, ніж перший, і його слід обрати.

Приклад 1.4.

Компанія „Смачний сир" – невеликий виробник різних продуктів із сиру. Один із продуктів – сирна паста – поставляється в країни ближнього зарубіжжя. Генеральний директор повинен вирішити, скільки ящиків сирної пасти слід виробляти протягом місяця. Імовірності, що попит на сирну пасту протягом місяця буде 5, 6, 7 чи 8 ящиків, рівні відповідно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1. витрати на виробництво одного ящика дорівнюють 35$. Компанія продає кожен ящик за ціною 85$. Якщо ящик із сирною пастою не продається протягом місяця, то вона псується і компанія не одержує доходу. Скільки ящиків треба робити протягом місяця?

Розв'язування:

Користуючись вихідними даними, будуємо матрицю гри. Стратегіями гравця 1 (компанія „Смачний сир") є різні показники числа ящиків із сирною пастою, які йому, можливо, варто виробляти. Станами природи виступають величини попиту на аналогічне число ящиків.

Обчислимо, наприклад, показник прибутку, який одержить виробник, якщо він зробить 7 ящиків, а попит буде тільки на 6. Кожен ящик продається по 85$. Компанія продала 6, а виробила 7 ящиків. Отже, виторг дорівнюватиме 6*85; а витрати виробництва 7 ящиків дорівнюватимуть 7*35. Разом прибуток від зазначеного поєднання попиту та пропозиції дорівнюватиме: $6 \cdot 85 - 7 \cdot 35 = 265\$$. Аналогічно проводяться розрахунки при інших поєднаннях попиту та пропозиції.

У підсумку одержимо таку платіжну матрицю в грі з природою.

Таблиця 2.

Попит Вироб- ництво	5	6	7	8	Очікуваний прибуток $M(x)$
	Імовірності попиту на ящики				
	(0,1)	(0,3)	(0,5)	(0,1)	
5	250	250	250	250	250
6	215	300	300	300	291,5
7	180	265	350	350	307,5
8	145	230	315	400	281

Продовження табл.2.

Попит Вироб- ництво	Дисперсія (D)	Середньо-квадратичне відхилення (σ)	Коефіцієнт варіації (V)
5	0	0	0
6	650,25	25,5	0,08
7	3251,25	57,02	0,18
8	4624	68	0,24

Як бачимо, найбільший середній очікуваний прибуток дорівнює 307,5$. Він відповідає виробництву 7 ящиків.

На практиці найчастіше в подібних випадках рішення приймаються виходячи з критерію максимізації середнього очікуваного прибутку чи мінімізації очікуваних витрат. Дотримуючись такого підходу, можна зупинитися на рекомендації виробляти 7 ящиків, і для більшості ОПР (особа, приймаюча рішення) рекомендація була б обгрунтованою.

Однак, залучаючи додаткову інформацію у формі розрахунку середньоквадратичного відхилення як індексу ризику, ми можемо уточнити прийняте на основі максимуму прибутку чи мінімуму витрат рішення.

Проводячи відповідні обчислення для випадків виробництва 5, 6, 7, 8 ящиків одержуємо:

5 ящиків:

$$D(x) = (250 - 250)^2 \cdot (0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1) = 0$$

$$\sigma(x) = 0$$

$$V = 0$$

6 ящиків:

$$D(x) = 0{,}1(215 - 291{,}5)^2 + (0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}1) \cdot (300 - 291{,}5)^2 = 650{,}25$$

$$\sigma = \sqrt{D(x)} = 25{,}5$$

$$V = \frac{\sigma(x)}{M(x)} = \frac{25{,}5}{291{,}5} = 0{,}08$$

7 ящиків:

$D(x) = 0,1(180 - 307,5)^2 + 0,3 \cdot (265 - 307,5)^2 +$

$+ (0,1 + 0,5) \cdot (350 - 307,5)^2 = 3251,25$

$\sigma(x) = 57,02$

$V(x) = 0,18$

8 ящиків:

$$D(x) = 0,1(145 - 281)^2 + 0,3 \cdot (230 - 281)^2 + 0,5 \cdot (315 - 281)^2 +$$

$$+ 0,1 \cdot (400 - 281)^2 = 4624$$

$$\sigma(x) = \sqrt{4624} = 68$$

$$V(x) = \frac{68}{281} = 0,24$$

З представлених результатів розрахунків з урахуванням отриманих показників ризиків – середньоквадратичних відхилень – очевидно, що виробляти 8 ящиків за будь-яких обставин недоцільно, тому що середній очікуваний прибуток дорівнює 281 – менше, ніж для 7 ящиків (307,5), а середньоквадратичне відхилення (68) для 8 ящиків більше аналогічного показника для 7 ящиків (57,02).

А от чи доцільне виробництво 7 ящиків у порівнянні з 6 і 5 – не очевидно, тому що ризик при виробництві 7 ящиків $(\sigma = 57,02)$ більший, ніж при виробництві 6 ящиків $(\sigma = 25,5)$ і тим більше 5 ящиків, де $\sigma = 0$. Вся інформація з урахуванням очікуваних прибутків і ризиків у наявності. Рішення повинен приймати генеральний директор компанії з урахуванням свого досвіду, схильності до ризику і ступеня вірогідності показників імовірностей попиту: 0,1; 0,3; 0,5; 0,1. Автори, з огляду на всі приведені числові характеристики випадкової величини – прибутку схиляються до рекомендації виробляти 6 ящиків (не 7, що випливає з максимізації прибутку без урахування ризику). Пропонується зробити свій вибір.

За допомогою статистичного методу оцінки ризику можна оцінити не тільки ризик конкретної угоди, а й підприємницької фірми в цілому за певний проміжок часу. Для наочності розглянемо задачу:

Приклад 1.5.

ТОВ „Ритм" необхідно оцінити ризик того, що покупець оплатить товар вчасно при укладенні договору про постачання продукції. Вихідні дані для аналізу зведені в табл. 3., при цьому угоди з даним партнером укладались протягом 10 місяців:

Таблиця 3.

місяці		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Терміни оплати	A	60	29	48	65	70	110	60	32	40	70
	B	40	53	22	79	51	35	21	41	45	40

Визначити термін оплати рахунка в аналізованому місяці. Насамперед визначимо середньозважений термін оплати рахунку за формулою: $R = \sum R_i \cdot P_i$,

де R – середньозважений термін оплати;

R_i - термін оплати по місяцях;

P_i - імовірність настання цього значення;

$P_i = \frac{K_i}{n}$, де K_i - кількість значень ознаки, що повторилась; n – загальна кількість подій.

Отже, отримаємо нову таблицю:

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_i	A	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2
	B	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2

Підставляючи вихідні дані і підраховані імовірності у формулу $R = \sum R_i \cdot P_i$ визначаємо середньозважений термін оплати рахунка. Ризикованість даної угоди визначається за допомогою стандартного відхилення, тобто можливе відхилення як у гірший, так і у кращий бік очікуваного значення показника, що розраховується від його середнього значення. Чим більша величина стандартного відхилення, тим більший розкид можливого результату, тим вищий підприємницький ризик у даній угоді.

$$D = \sum \left(R - R_i\right)^2 \cdot P_i$$
, де D – дисперсія; σ - середньоквадратичне відхилення.
$$\sigma = \sqrt{D}$$

$$D_A = \left(58-60\right)^2 \cdot 0,2 + \left(58-29\right)^2 \cdot 0,1 + \left(58-48\right)^2 \cdot 0,1 +$$
$$+\left(58-65\right)^2 \cdot 0,1 + \left(58-70\right)^2 \cdot 0,2 + \left(58-110\right)^2 \cdot 0,1 +$$
$$+\left(58-60\right)^2 \cdot 0,2 + \left(58-32\right)^2 \cdot 0,1 + \left(58-40\right)^2 \cdot 0,1 +$$
$$+\left(58-70\right)^2 \cdot 0,2 = 790,6\left(\text{днів}\right)^2$$
$$\sigma_A = 28,1$$
$$D_B = \left(43-40\right)^2 \cdot 0,2 + \left(43-53\right)^2 \cdot 0,1 + \left(43-22\right)^2 \cdot 0,1 +$$
$$+\left(43-79\right)^2 \cdot 0,1 + \left(43-51\right)^2 \cdot 0,1 + \left(43-35\right)^2 \cdot 0,1 +$$
$$+\left(43-21\right)^2 \cdot 0,1 + \left(43-41\right)^2 \cdot 0,1 + \left(43-45\right)^2 \cdot 0,1 +$$
$$+\left(43-40\right)^2 \cdot 0,2 = 241,1\left(\text{днів}\right)^2$$
$$\sigma_B = 15,5$$

Із розрахункових значень стандартних відхилень можна зробити висновок, що укладення угод з фірмою *B* менш ризиковане, оскільки і середній термін оплати, і розкид результату для цієї фірми менші. У випадку, якщо необхідно порівняти два варіанти угоди з різними очікуваними результатами і різним ризиком, особливий інтерес становить показник, який називається коефіцієнтом варіації:

$$V = \frac{\sigma}{R},$$

де σ - стандартне відхилення; *R* – очікуваний результат.

Одержаний показник дає характеристику ризику на одиницю очікуваного результату. Завдяки порівнянню коефіцієнтів варіації двох проектів, вибирається проект із найменшим коефіцієнтом.

$$V_A = 0{,}484, V_B = 0{,}360.$$

У даному випадку видно, що укладання угоди з фірмою *B* менш ризиковане. Перевага статистичного методу – простота математичних розрахунків, а явний недолік – необхідність великої кількості вихідних даних, оскільки чим більший масив вихідних даних, тим точніший розрахунок.

Проте статистичним методом неможливо користуватися, якщо досліджуваний об’єкт – нова недавно зареєстрована компанія. Відзначимо, що дисперсія сигналізує про наявність ризику, але при цьому приховує напрямок відхилення від очікуваного значення. Підприємцю часто потрібно знати, що найбільш імовірно: втрати чи прибуток у результаті здійснення угоди.

Розглянемо як ілюстрацію вибір певною особою одного з двох варіантів інвестицій в умовах ризику. Припустимо, є два проекти *A* і *B*, у які зазначена особа може вкласти кошти. Проект *A* у визначений момент у майбутньому забезпечує випадкову величину прибутку. Припустимо, що її середнє очікуване значення (математичне очікування), дорівнює $\overline{x_A}$ з дисперсією σ_A^2. Для проекту *B* ці числові характеристики прибутку як випадкової величини передбачаються рівними відповідно $\overline{x_B}$ з дисперсією σ_B^2.

Можливі такі випадки:

a) $\overline{x_A} = \overline{x_B}$, $\sigma_A^2 < \sigma_B^2$, слід обрати проект *A*;

в) $\overline{x_A} > \overline{x_B}$, $\sigma_A^2 < \sigma_B^2$, слід обрати проект *A*;

c) $\overline{x_A} < \overline{x_B}$, $\sigma_A^2 > \sigma_B^2$, слід обрати проект *B*;

d) $\overline{x_A} > \overline{x_B}$, $\sigma_A^2 > \sigma_B^2$,

e) $\overline{x_A} < \overline{x_B}$, $\sigma_A^2 < \sigma_B^2$.

У двох останніх випадках рішення про вибір проекту *A* чи *B* залежить від ставлення до ризику особи, що приймає рішення (ОПР). Зокрема, у випадку *d* проект *A* забезпечує вищий середній прибуток, однак він і більш ризикований. Вибір при цьому визначається тим, якою випадковою величиною середнього прибутку компенсується для ОПР задане збільшення ризику. У випадку *e* для проекту *A* ризик менший, але й очікуваний прибуток менший.

4.Ризик і корисність.

4.1.Поняття про корисність. Побудова функції корисності.

Корисність-це міра задоволення, яке одержує суб`єкт від споживання товару або виконання деякої дії.

На основі цього означення кожному товару або кожній дії потрібно поставити у відповідність певне число. З допомогою корисності можна порівняти споживчий ефект товарів.

Практичну побудову функції корисності розглянемо експертним методом.

Побудова функції корисності може бути здійснена групою експертів за спрощеною формулою.

I етап. Визначають у відсотках найкраще та найгірше з можливих допустимих значень показника присвоюють їм значення корисності. Для цього визначають нижню і верхню межу цього показника і присвоюємо їм відповідні корисності. Нехай X_{min}=80%, X_{max}=100%

Корисність:$U(X_{min})=0$, $U(X_{max})=1$

II етап. Розглядають ще декілька проміжних значень, та визначають значення функції корисності.

III етап. Після того, як кожен із членів експертної групи зробив самостійну оцінку корисності проміжних значень, обчислюють середні рівні цих оцінок

IV етап. При великій розкиданості оцінок експертів від середніх величин повертаються до етапу II.

4.2. Корисність за Нейманом. Сподівана корисність

В даному питанні будем говорити про ризик, як про лотерею.

Лотерея $L(x_o,p,x_1)$ — це ситуація при якій суб`єкт може одержати результат x_o,з імовірністю p, або результат x_1,з імовірністю $1–p$.

Корисність за Нейманом варіанту x - це імовірність $p(x)$ з якою суб`єкту однаково чи одержувати гарантоване x, або приймати участь в лотереї $L(x_o,p,x_1)$,при чому x_o - це результат менш пріоритетні ший від x, x_1 - більш пріоритетніший ніж x.

Корисність за Нейманом — це певна імовірність. Звідси витікає що корисність не менше від 0 і не більша 1.

$0<=U<=1$

Нехай суб'єкт приймає участь в лотереї у якій можливі певні результати з певними ймовірностями.

x_1 x_2 x_3 ... x_n при чому сума ймовірностей повинна

p_1 p_2 p_3 ... p_n дорівнювати 1.

Сподіваний виграш – це математичне сподівання випадкової величини x.

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad 4.2.1$$

Якщо величина X розподілена неперервно із щільністю розподілу $f(x)$,то сподіваний виграш визначається так.

$$\overline{x} = \int_a^b xf(x)dx \qquad 4.2.2$$

Вважаємо, що кожному виграшу x відповідає певна корисність $U(x)$.Тоді сподівана корисність визначається так:

$$U = M(x) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i)p_i \qquad 4.2.3$$

-сподівана корисність для дискретного випадку.

Для неперервної величини:

$$U = M(x) = \int_a^b U(x)f(x)dx \qquad 4.2.4$$

Розглянемо детермінований еквівалент лотереї.

Детермінований еквівалент лотереї (ДЕЛ) - це гарантована сума $\hat{\chi}$, яка рівнозначна участі в лотереї. Ця величина визначається із такого співвідношення:

$$U\left(\hat{\chi}\right) = M\left(\chi\right) \qquad 4.2.5$$

4.3. Різне ставлення до корисності.

Суб′єкт називається не схильним до ризику, якщо для нього більш пріорітетно одержати гарантований виграш, ніж приймати участь в лотереї.

Математична несхильність до ризику записується так:

$$U(\hat{\chi})\rangle \hat{U}(\chi)$$

Суб′єкт схильний до ризику, якщо для нього більш приорітетнішим є участь в лотереї, ніж одержання сподіваного виграшу.

$$U(\hat{\chi})\langle \hat{U}(\chi)$$

Суб′єкт називається байдужим до ризику, якщо йому однаково чи одержувати гарантований сподіваний виграш, чи приймати участь в лотереї.

$$U(\hat{\chi}) = \hat{U}(\chi)$$

Розглянемо функції корисності:

1. для суб′єкта байдужого до ризику:

$$U\left(\chi\right) = a + b\left(\chi\right),\ b > 0$$

2. для суб′єкта керування з несхильністю до ризику:

$$U\left(\chi\right) = \log\left(x + b\right), \chi > -\mathrm{b}$$

3. із схильністю до ризику:

$$U\left(\chi\right) = \chi^2,\ \chi \geq 0.$$

Розглянемо поняття премії за ризик.

Премія за ризик — це різниця між сподіваним виграшем і детермінованим еквівалентом

$$\Pi(\chi) = \overline{\chi} - \hat{\chi}$$

Премія за ризик — це величина, якою суб′єкт згідний знехтувати, щоб уникнути ризику, пов'язаного з участю в лотереї.

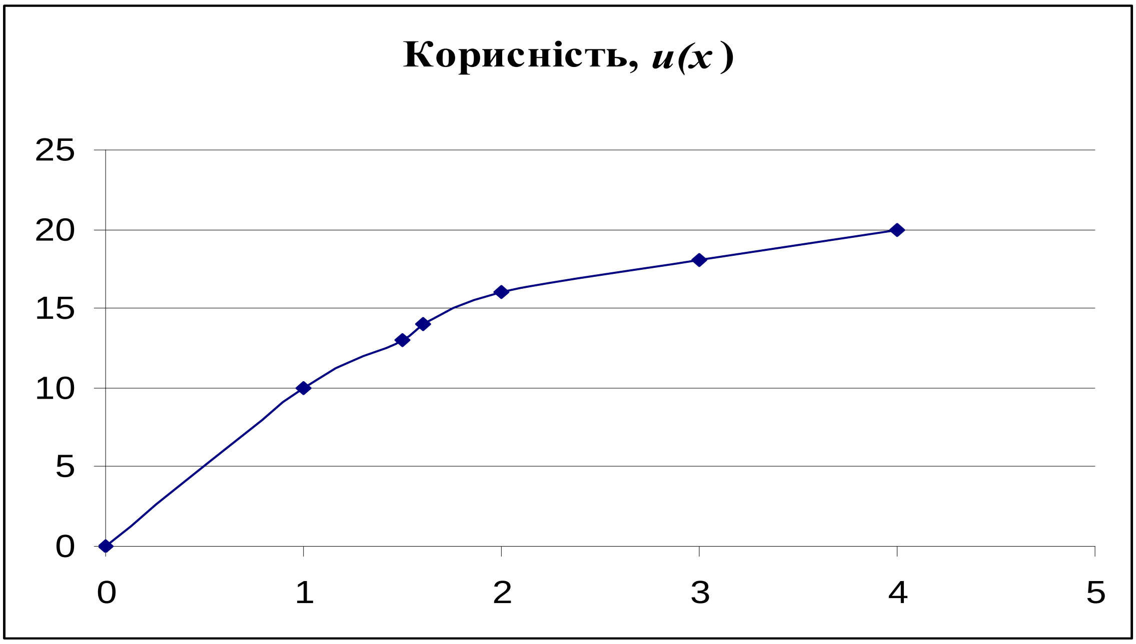
Якщо особа, що приймає рішення зіштовхується з несприятливою для лотереєю, то природно виникає питання, скільки вона заплатила, за те, щоб не брати участі в цій лотереї.

Побудуємо криву (функцію корисності) суб'єктами схильного до ризику.

Крива *ON*, що задає рівень корисності (на осі ординат), котрий може бути досягнений за відповідним рівнем доходу (відкладеного в 10^2 грн. на осі абсцис). Гранична корисність зменшується з 10 одиниць коли дохід зростає від 0 до 1 грн., до 16 одиниць, коли дохід збільшується від 1 до 2,та до 20 одиниць, коли зростає від 2 до 3. Так ось, особа, з такою функцією корисності має дохід 150 грн і оцінює нове місце роботи, що пов'язане з ризиком.

Дохід на новому місці роботи може бути в 2 рази більшим, або знизитись до 100 грн. Кожна альтернатива має імовірність *p=0,5*.

Переходити чи не переходити на нове місце роботи?



Розв’язування:

Оскільки теперішня зарплата становить 150 грн, то функція корисності *U(150)=13* (рівень корисності,що відповідає доходам у 100 грн.Точка А складає 10 одиниць, а рівень корисності, що пов’язаний з доходами у 300 грн.дорівнює 18 точка В.

Обчислимо сподівану корисність:

$$\overline{U} = M(U(x)) = 0,5 \cdot U(300) + 0,5 \cdot U(100) = 0,5 \cdot 18 + 0,5 \cdot B = 14$$

Отже нове місце роботи, що пов’язане з ризиком, є більш пріоритетним, бо сподівана корисність $\overline{U} = 14$. Одиниць, більша ніж корисність, що пов’язана з теперішнім місцем роботи, яка становить лише 13 одиниць.

Отже, цій особі слід прийняти рішення про перехід на нове місце роботи, хоч воно і пов’язане з ризиком.

Підрахуємо також премію за ризик.

Ми вже підрахували, що сподівана корисність у 14 одиниць досягається при переході на нове місце роботи. Сподіваний дохід:

$$\overline{X} = M(x) = 100 \cdot 0,5 + 300 \cdot 0,5 = 200 \text{(грн.)}$$

Але як видно з малюнка рівень корисності в 14 одиниць може бути також досягнутий, якщо стабільний (певний) дохід цієї особи, тобто ДЕЛ буде дорівнювати 160 грн. Точка *M* на *(AB)* з рівнем корисності в 14 одиниць, математично так:

$$U(\overline{X}) = M(U) = 200$$

Премія за ризик.

$$\Pi(x)=200–160=40 \text{ грн.}$$

Таким чином 40 грн. складає той розмір доходу, яким особа готова знехтувати, вважаючи приорітетнішою роботу з певним (стабільним) доходом 160 грн. аніж з ризикованим.

Розглянемо наступний приклад:

Особа з тією ж функцією корисності повинна вибрати місце роботи, маючи три альтернативних варіанти:

Перший варіант –це стабільний дохід у 200 грн.

Другий варіант задано лотереєю- L (100;0,5;300), і третій - L(0;0,5;400).

Яке місце роботи обрати даній особі ?

Розв'язання: Розглянемо графік, бачимо, що

перше місце дає корисність

$U_1(200)=16$. $x_1=200$, друге місце роботи:

$\overline{x_2}=100\cdot 0,5+300\cdot 0,5=200$.

$\overline{U}_2=0,5\cdot U(100)+0,5\cdot U(300)=0,5\cdot 10+0,5\cdot 18=14$, і третє місце роботи:

$\overline{X}=0\cdot 0,5+400\cdot 0,5=200$

$\overline{U_3}=0,5\cdot U(0)+0,5\cdot U(400)=0+0,5\cdot 200=10$

Оскільки $U_1=16$ найбільша, то необхідно обрати перше місце роботи із стабільним доходом в 200 грн.

Розглянемо ще один приклад:

Визначити сподіваний виграш, дел. і премію за ризик для лотереї L(4; 0,6; 16). Функція корисності така: $U(X)=0,5\sqrt{X}$.

Розв'язання:

1.Знаходимо сподіваний виграш.

$$\overline{X}=4\cdot 0,6+16\cdot 0,4=8,8$$

2. Визначимо сподівану корисність:

$$\overline{U}=U(4)\cdot 0,6+U(16)\cdot 0,4=0,5\sqrt{4}\cdot 0,6+0,5\sqrt{16}\cdot 0,4=1,4.$$

3. Знаходимо ДЕЛ.

$$0,5\sqrt{X}=1,4$$

$$\sqrt{X}=2,8$$

$\hat{X}=7,84$ – результат еквівалентний участі в лотереї.

4. Знаходимо премію за ризик

$$П(X)=8,8-7,84=0,96.$$

Суб'єкт згідний знехтувати сумою в 0,96 щоб уникнути від участі в лотереї.

4.4 Криві байдужості.

Локальна несхильність до ризику у деякій точці x визначається за допомогою функції несхильності

$$r(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} \qquad 4.4.1$$

Криву байдужості можна подати на підставі функції корисності в двовимірному просторі, де на осі абсцис відкладаються величини ступеня ризику (σ), а на осі ординат - розмір виграшу *(m)*.

Кожна особа має свій графік кривих байдужості, які будуються на підставі її власної функції корисності. Криві байдужості (1-5) можна трактувати, як різні рівні значень функцій корисності.

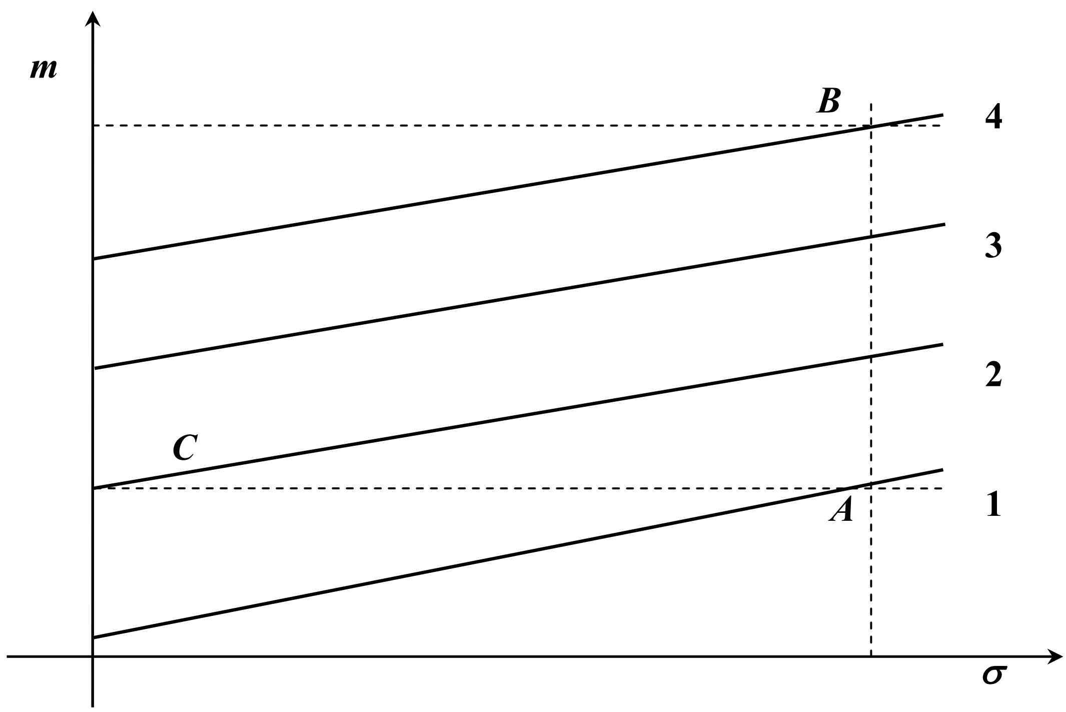


Рис. 4.4.1.

Крива 1 – характеризує всі можливі норми прибутку і ризику. При яких рівень корисності даної особи дорівнює 5 одиниць. Переміщення вздовж цієї кривої буде зберігати один і той же рівень корисності, який рівний п’яти одиницям. Одне і теж значення функції корисності може бути досягнуте при великій нормі прибутку і відповідно більшому ступені ризику або при меншій нормі прибутку і меншому ступені ризику. Тобто, щоб збільшити норму прибутку і одночасно залишитися з тією самою величиною корисності, треба обтяжувати себе ризиком.

Часто зміни значень норми прибутку і ризику призводить до зміни рівня корисноті. Наприклад, зростання норми прибутку при незміному ступені ризику означає перехід на іншу, (вищу) криву байдужості, що відповідає більшому значеню функції корисності. На рисунку цій ситуації відповідає перехід з точки **А** до точки **В**. аналогічно, зменшення ступення ризику при незмінній нормі прибутку означає перехід на криву байдужості, що відповідає більшому значенню функції корисності. В цій ситуації відповідає перехід з точки **А** до **С**.

Розглянемо криві байдужості трьох менеджерів: ***A, B, C*** позначимо їх відповідно 1, 2, 3.

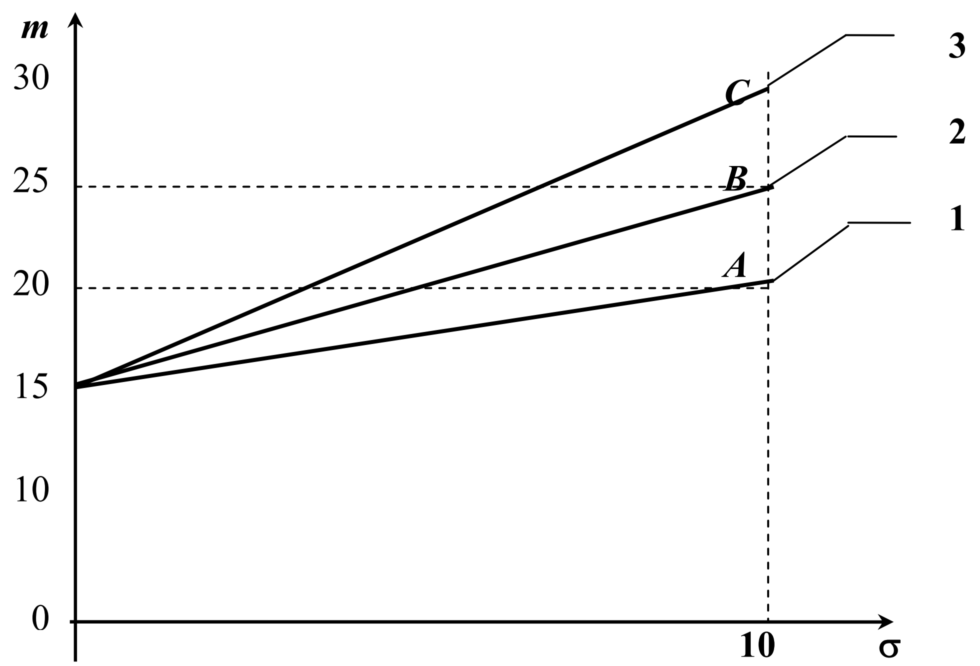


Рис 4.4.2.

З малюнка видно, що перша особа відзначається найбільшою схильністю до ризику, а третя найбільшою несхильністю, оскільки при однаковому ступені ризику σ=10, перший надіється на сподіваний прибуток в $m_1=20$, а третій $m_3=30$. Чим більш схильнішою до ризику є особа, тим менший кут нахилу до осі абсцис мають криві байдужості цієї особи.

5. Диверсифікація, як спосіб зниження ризику. Теорія портфеля.

5.1..Поняття про диверсифікацію, норму прибутку і ризик цінних паперів.

Для роботи будь-якого підприємства важливий асортимент товарів, послуг. Чим він ширший, тим чіткіший є ритм виробництва, вища його рентабельність. Проте це впливає на мобільність відносно змін зовнішнього середовища.

На ринку цінних паперів в країнах з розвинутою ринковою економікою основний принцип раціонального поводження відповідає побутовій мудрості: "Ніколи не клади всі яйця до одного кошика ". Стосовно ризику цінних паперів це означає ,що інвестор не повинен вкладати гроші у цінні папери лише одного виду. Необхідне певне розмаїття, диверсифікація вкладень. Отже:

Диверсифікація – це розподіл інвестицій між різними об'єктами вкладення, які безпосередньо не зв'язані між собою.

З допомогою диверсифікації в більшості випадків вдається знизити ризик. Отже диверсифікація – це один із способів зниження ризику.

Найчастіше інвестиції здійснюються за допомогою цінних паперів.

Ефективність цінних паперів залежить:

1) ціна купівлі (це відома величина)

2) проміжних виплат

3) ціна продажу

Економічний фінансовий ризик пов'язаний з невизначеністю відносно прогнозу на майбутнє стосовно цін (продажу, а для звичайних акцій і майбутніх дивідендів).

Власне тому досвідчений інвестор є власником не одного виду цінних паперів, а декількох. Сукупність цінних паперів складає портфель.

Під **структурою цінних паперів** розуміють співвідношення часток інвестицій у цінні папери різних видів та підприємств у різного інвестора.

Визначення структури є дуже важливим. Приймається гіпотеза, що будь-які конкретні величини ефективності (норми прибутку) операції з купівлі-продажу цінних паперів є реалізаціями випадкової величини. Тому основним апаратом для вивчення властивостей портфеля є правила теорії імовірності та математичної статистики.

Будь-який вид ризикових цінних паперів характеризуються двома показниками: сподіваною ефективністю (нормою прибутку) і ступенем ризику (варіацією (дисперсією)). Ці ж показники можна обчислити для портфеля цінних паперів, якщо відомі коефіцієнти кореляції між ефективностями кожної з пар цих паперів.

Зрозуміло, що кожний інвестор завжди зіштовхується з дилемою: бажанням мати якомога більшу ефективність портфеля та бажанням забезпечити вклади мінімальним ступенем ризику.

Проблемою обрання структури портфеля займалися Г. Марковіц та Д. Тобін, за що були відзначені Нобелівськими преміями з економіки.

Портфель цінних паперів – це розподіл засобів між цілим рядом різних активів у найбільш вигідній та безпечній пропорції.

Правило для інвестора: - необхідно прагнути розподілити вкладання між різними видами активів, такими що показали минулі роки:

1) різну щільність зв’язку (кореляцію) з загальноринковими цінами;

2) протилежну фазу коливань норми прибутку між собою (цін) всередині портфеля.

При цьому збитки будуть мінімальними. Але питання одержання максимального прибутку залишається відкритим. Для цього необхідне застосування теорії корисності.

Управління портфелем цінних паперів – це планування, аналіз і регулювання структури портфеля, діяльність по його формуванню та підтримці з метою досягнення поставлених цілей при збереженні необхідного рівня його ризику та мінімізації затрат, що пов’язані з ним.

Основні цілі інвестування :

1) одержання прибутку;

2) збереження капіталу;

3) забезпечення приросту капіталу (на базі зростання курсової вартості цінних паперів).

Ліквідність цінних паперів розглядають з двох позицій:

- здатність швидкого перетворення всього портфеля цінних паперів у грошові засоби (з певними невеликими затратами на реалізацію).
- здатність своєчасно погасити зобов’язання перед кредиторами, повернення позичених у них грошей ,за рахунок яких був сформований портфель цінних паперів.

Ризик портфеля – це міра можливості того , що настануть обставини, за яких інвестор може понести збитки, спричинені інвестиціями в портфель цінних паперів ,а також операціями по залученню ресурсів до формування портфеля.

Кінцевою метою найтиповішого управління портфелем є прибутковість, тобто перевищення доходів від інвестицій в цінні папери над затратами на залучення грошових ресурсів, необхідних для цих вкладень , за умов забезпечення певного ступеня ліквідності та ризику портфеля.

Основною характеристикою кожного цінного паперу є норма прибутку. Її визначають, як відношення прибутку котрий приносить даний цінний папір, до затрат, пов’язаних з купівлею цього цінного паперу.

Норма прибутку є одним з основних критеріїв , якими керуються інвестори, під час прийняття рішення щодо купівлі цінних паперів.

Зрозуміло, що значення норми прибутку пов'язане з невизначеністю, тобто є випадковою змінною. Це означає , що вона може приймати різні значення з різними імовірностями.

Введемо *n*- кількість можливих для спостереження величин норми прибутку.

R_i – *i*-те можливе значення норми прибутку (*i*=1, *n*).

P_i – імовірність *i*-ї величини норми прибутку (*i*=1, *n*).

Тоді сподівана норма прибутку обчислюється:

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i \qquad 5.1.1$$

Приймають, зокрема, що поводження в майбутньому цінного паперу залежить від того , як формувалися його норми прибутку в минулому.

Введемо : *T* – кількість періодів , що минули ;

R_t – норма прибутку від цінного паперу, що мала місце в *t* – му періоді.

У випадку звичайної акції норма прибутку в *t* – му періоді визначається :

$$R_t = \frac{(C_t - C_{t-1} + D_t) \times 100}{C_{t-1}} \qquad 5.1.2$$

C_t - ціна паперу в *t* – му періоді.

D_t - дивіденди, нараховані в *t* – му періоді.

Сподівана норма прибутку ЦП:

$$m = (\sum_{t=1}^{T} R_t) / T \qquad 5.1.3$$

Другою важливою характеристикою є ризик ЦП – варіація норми прибутку

$$\sigma = \sqrt{Dx\ )} \qquad 5.1.4$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} p_i (R_i - m)^2 \qquad 5.1.5$$

У випадку, коли наявні статистичні дані щодо минулого, варіацію визначають :

$$D = \sum_{t=1}^{T} (R_t - m)^2 /(T - 1) \qquad 5.1.6$$

Приклад: На знаходження ризику ЦП

Стан економічного середовища	Імовірність	Норма прибутку
піднесення	0,5	40%
застій	0,4	5%
занепад	0,3	-10%

Розвязання:

Знаходимо сподівану норму прибутку ЦП.

m=40∗0.3+5∗0.4+(-10) ∗0.3=11%

визначимо дисперсію норми прибутку

$D=40^2*0,3+5^2*0,4+10^2*0,3-11^2=399$

σ=$\sqrt{399}$=19,97% - ризик ЦП.

<u>Приклад</u> . Знайти ризик акції ***A***, відносно якої ми маємо статистичні дані за останні 5 років.

Період часу	C_t	d_t	C_{t-1}	R_t
0	140	-	-	-
1	150	5	10	10,71
2	165	4	15	12,07
3	155	3	-10	-4,85
4	160	2	5	5,16
5	157	1	-3	1,25

$$R_1 = \frac{10+5}{140}100 = 10.71\%$$

$$R_2 = \frac{15+4}{150}100 = 12.07\%$$

Знаходимо середню норму прибутку:

$$m = \frac{10.71 + 12.07 + (-4.85) + 5.16 - 1.25}{5} = 4.49$$

Знайдемо :

$$D_{(x)} = ((10.71 - 4.49)^2 + (12.07 - 4049)^2 + (-4.85 - 4.49)^2 + (5.16 - 4.49)^2 +$$
$$+ (-1.25 - 4.49)^2)/4 == 56.56$$

$\sigma = \sqrt{56.56}$

5.2.Оптимізація пакету з двох різних видів акцій.

Як правило, розсудливий інвестор шукає такі можливості розміщення капіталу, за яких зі збільшенням норми прибутку одночасно зменшувався ступінь ризику. Такі можливості дає йому формування портфеля цінних паперів. Вона характеризує взаємозв'язок між нормами прибутку ЦП.

Припустимо що портфель утворюють дві різні акції А та В:

Види акцій	Норма прибутку	дисперсія	середньоквадратичне відхиленя
А	m_1	D_1	σ_1
В	m_2	D_2	σ_2

Припустимо, що інвестор посідає до якого входить 100 акцій певної дніпропетровської фірми (А) та 200 акцій певної київської фірми (В).

Ціна однієї акції А – 500 тис грн., В – 200 тис грн. Знайдемо частку вартості кожного виду акцій в портфелі :

$$x_1 = \frac{100 \cdot 500}{100 \cdot 500 + 200 \cdot 200} = 0.56$$

$$x_2 = \frac{200 \cdot 200}{100 \cdot 500 + 200 \cdot 200} = 0.44$$

Очевидно, що частка кожної є величиною $0 \le x \le 1$.

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad 5.2.1$$

Частки можна трактувати як частини від одиниці капіталу (грошей), що вкладені у відповідний вид цінних паперів. Знаючи сподівані величини норми кожної з цих акцій та їх частки в портфелі, легко визначити сподівану норму прибутку портфеля з двох акцій за формулою:

$$m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2 \qquad 5.2.2.$$

де

m_p -норма прибутку портфеля з двох різних акцій.

Норма прибутку портфеля з двох різних акцій є зваженою середньою нормою прибутку кожного виду акцій, причому ваговими коефіцієнтами виступають частки цих акцій (в грошовому обсязі) в портфелі .

<u>Приклад..</u> Інвестор посідає портфель, що складається з двох акцій А та В з нормами прибутку 200% та 250% відповідно, причому частка акцій А становить 40% портфеля.

Розв’язання:

$$m_p = 0.4 \cdot 200\% + 0.6 \cdot 250\% = 230\%$$

Норма прибутку портфеля з двох акцій завжди знаходиться в інтервалі, граничними якого є норми прибутку акцій, що входять до портфеля .

Визначимо ризик (варіація і дисперсія) портфеля двох акцій:

$$D_p = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \qquad 5.2.3$$

σ_1 - середнє квадратичне відхилення норми прибутку акцій першого виду;

σ_2 - середнє квадратичне відхилення норми прибутку акцій другого виду;

ρ_{12} - коефіцієнт кореляції між акціями обох видів і визначається :

$$\rho_{12} = \frac{\sum p_i(R_{1i} - m_1)(R_{2i} - m_{2i})}{\sigma_1\sigma_2} \qquad 5.2.4$$

p_i - імовірність стану середовища;

R_{1i} - норма прибутку акцій першого виду;

m_1 - середня норма прибутку акцій 1-го виду;

R_{2i} - норма прибутку акцій першого виду в іншому стані середовища;

m_2 - середня норма прибутку акцій 2-го виду.

1. Коефіцієнт кореляції $-1 \le \rho_{12} \le 1$.

2. $|\rho|$ - вказує на силу взаємозв'язку норм прибутку акцій, тому чим вищою є абсолютна величина , тим сильніше між собою пов'язані ці акції (тобто ≈1, або ≈-1), якщо ж $|\rho|$ →0, то ці акції слабо пов'язані.

3. Знак коефіцієнта кореляції вказує на напрямок взаємозв'язку норми прибутку акцій; якщо ρ >0, то додатна кореляція, при зростанні норми прибутку (R_1) однієї акції зростає, зростає R_2 другої акції.

Якщо ρ < 0, то від'ємна кореляція, при зростанні норми прибутку (R_1) однієї акції зростає, R_2 другої акції спадає.

На практиці додатна кореляція зустрічається частіше. Це пов'язано з так званою, силою прискорення ринку.

Маючи інформацію відносно норм прибутку акцій у минулому, коефіцієнт кореляції двох акцій приймає такий вигляд:

$$\rho_{12} = \frac{\sum p_i (R_{1t} - m_1)(R_{2t} - m_{2i})}{(T-1)\sigma_1 \sigma_2} \qquad 5.2.5.$$

де

T - к-сть попередніх періодів, для яких маємо інформацію;

R_{1t} - норма прибутку першого цінного паперу в t-му періоді;

R_{2t} - норма прибутку другого цінного паперу в t-му періоді;

m_1 - сподівана норма прибутку першої акції;

m_2 - сподівана норма прибутку другої акції;

σ_1 - ризик I-го цінного паперу;

σ_2- ризик II-го цінного паперу.

Як видно ризик портфеля залежить не тільки від ризику кожного виду акцій, а і від кореляції цих акцій, тобто від ступеня взаємодії їх норм прибутку.

Далі більш детально проаналізуємо вплив кореляції на ризик портфеля, тобто відшукаємо оптимальну структуру портфеля, яка б забезпечила мінімальний ризик.

Ризик цінних паперів.

Диверсифікація означає розподіл засобів інвестування між різними об‘єктами вкладення з метою зменшення ризику, забезпечення стабільності прибутків.

Розглянемо інвестування в цінні папери. Головні цілі інвестування в цінні папери такі:

- збереження капіталу;
- одержання прибутку;
- збільшення вартості капіталу.

Основною характеристикою цінних паперів є норма прибутку як відношення прибутку до затрат на їх придбання. Оскільки норма прибутку формується під впливом випадкових чинників, то її можна вважати випадковою величиною.

Другою важливою характеристикою цінних паперів є їх ризик, який визначається як дисперсія (середнє квадратичне відхилення, норми прибутку).

Нехай відомий імовірнісний розподіл норми прибутку R як дискретної випадкової величини

R	R_1	R_2	$\dots$	R_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Тут n – кількість можливих значень норми прибутку,

R_i – i–те можливе значення норми прибутку,

p_i – імовірність величини R_i.

Тоді можна визначити сподівану (математичне сподівання) норму прибутку та її дисперсію σ^2.

$$m=\sum_{i=1}^{n}p_iR_i\,,\qquad\qquad \sigma^2=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(R_i-m\right)^2,$$

$$\text{або}\qquad \sigma^2=\sum_{i=1}^{n}p_iR_i^2-m^2$$

Як правило, інвестор купує декілька видів цінних паперів, які утворюють портфель. Взаємозв'язок між нормами прибутку двох видів цінних паперів виражається поняттям їх коефіцієнта кореляції ρ_{12}

$$\rho_{12}=\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\left(R_{1i}-m_1\right)\left(R_{2i}-m_2\right)\right)/\left(\sigma_1\cdot\sigma_2\right).$$

Тут R_{1i}, m_1, σ_1 – відповідно норма прибутку, сподівана норма прибутку та середнє квадратичне відхилення норми прибутку цінних паперів першого виду, R_{2i}, m_2, σ_2 – аналогічні характеристики цінних паперів другого виду. Коефіцієнт кореляції ρ_{12} змінюється у межах $[-1;1]$ і характеризує тісноту взаємозв'язку норм прибутку цінних паперів двох видів. Близькість $|\rho_{12}|$ до одиниці означає наявність тісного взаємозв'язку норм прибутку, а якщо $|\rho_{12}|$ близьке до 0, то вказані характеристики цінних паперів пов'язані слабо.

Приклад 1. Визначити ризики акцій 1, 2 та коефіцієнт кореляції їх норм прибутку на основі числової інформації у виді такої таблиці.

Стан економіки	Імовірність	Норми прибутку акцій (%)	
		1	2
Зростання	0,3	40	30
Застій	0,4	5	7
Занепад	0,3	-10	-5

Розв'язання. Обчислюємо сподівані норми прибутків акцій.

$$m_1=0{,}3\cdot40+0{,}4\cdot5-0{,}3\cdot10=11\%$$

$$m_2=0{,}3\cdot30+0{,}4\cdot7-0{,}3\cdot5=10{,}3\%$$

Визначаємо дисперсії σ_1^2, σ_2^2 та середні квадратичні відхилення норм прибутків акцій.

$$\sigma_1^2=0{,}3\cdot40^2+0{,}4\cdot5^2-0{,}3\cdot(-10)^2-11^2=399(\%)^2$$

$$\sigma_2^2=0{,}3\cdot30^2+0{,}4\cdot7^2-0{,}3\cdot(-5)^2-10{,}3^2=191{,}01(\%)^2$$

$$\sigma_1=\sqrt{\sigma_1^2}=\sqrt{399}=19{,}97\%\,,$$

$$\sigma_2=\sqrt{\sigma_2^2}=\sqrt{191{,}01}=13{,}82\%\,.$$

Знаходимо коефіцієнт кореляції норм прибутків акцій.

$$\rho_{12}=\frac{0,3(40-11)(30-10,3)+0,4(5-11)(7-10,3)+}{19,97\cdot 13,82}$$
$$\frac{+0,3(-10-11)(-5-10,3)}{}=0,993 .$$

Отже, існує дуже тісний взаємозв‘язок між нормами прибутку цих акцій.

З‘ясуємо як визначити норму прибутків та ризик цінних паперів на основі статистичної інформації за попередні періоди часу. Використаємо такі позначення:

T – кількість періодів часу, R_t, C_t, d_t – відповідно норма прибутку, ціна та дивіденди цінного паперу в період часу t, C_{t-1} – вартість цінного паперу в попередній період t-1.

$$R_t=\frac{C_t-C_{t-1}+d_t}{C_{t-1}}\cdot 100\%,$$

$$m=\frac{\sum_{t=1}^{T}R_t}{T},\qquad \sigma^2=\frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t-m)^2}{T-1}.$$

Приклад 2. Обчислити ризик акцій на основі такої статистичної інформації

Період часу	C_t (грн.)	D_t (грн.)
0	140	-
1	150	5
2	165	4
3	155	2
4	160	3
5	157	1

Розв‘язання. Визначаємо норми прибутків R_t акцій в кожен період часу.

$$R_1=\frac{150-140+5}{140}\cdot 100\%=10,71\%,$$
$$R_2=\frac{165-150+4}{150}\cdot 100\%=12,67\%,$$
$$R_3=\frac{155-165+2}{165}\cdot 100\%=-4,85\%,$$
$$R_4=\frac{160-155+3}{155}\cdot 100\%=5,16\%,$$
$$R_5=\frac{157-160+1}{160}\cdot 100\%=-1,25\%.$$

Обчислюємо сподівану норму прибутку m та ризик σ^2 акції.

m=(10,71+12,67-4,85+5,16-1,25)/5=4,49%,

$$\sigma^2=\frac{(10,71-4,49)^2+(12,67-4,49)^2+(-4,85-4,49)^2+}{4}$$
$$\frac{+(5,16-4,49)^2+(-1,25-4,49)^2}{}=56,56(\%)^2$$

Коефіцієнт кореляції цінних паперів видів 1,2 визначається так

$$\rho_{12} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_{1t} - m_1)(R_{2t} - m_2)}{(T-1) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2},$$

Тут R_{1t}, R_{2t} – відповідно норми прибутків цінних паперів видів 1 та 2 в період часу t.

6.2. Оптимізація портфеля з двох видів цінних паперів.

Диверсикацію початку розглянемо на прикладі оптимізації портфеля (пакета) з цінних паперів двох видів, оптимізація полягає у визначенні таких часток x_1, x_2 цінних паперів у портфелі (x_1+x_2=1), щоб його ризик σ_p^2 був мінімальним. Ризик (дисперсія) портфеля цінних паперів двох видів обчислюється за формулою:

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}.$$

У вираз для σ_p^2 підставимо значення $x_2 = 1 - x_1$.

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1 - x_1)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2x_1 \cdot (1 - x_1) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}.$$

Дослідимо на мінімум величину σ_p^2 як функцію від x_1.

$$\frac{d\sigma_p^2}{dx_1} = 2\sigma_1 x_1 - 2(1 - x_1)\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4x_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 0.$$

Звідси одержимо критичне значення x_1^0.

$$x_1^0 = \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1\rho_{12})}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$$

З математичної сторони визначення найменшого значення ризику портфеля акцій – це задача знаходження мінімального значення функції $\sigma_p^2(x_1)$ на закритому проміжку [0;1].

При цьому можливі такі випадки:

1) $0 < x_1^0 < 1$;

2) $x_1^0 \le 0$ або $x_1^0 \ge 1$.

У першому випадку порівнюємо між собою три значення ризику портфеля $\sigma_p^2(0)$, $\sigma_p^2(x_1^0)$, $\sigma_p^2(1)$ і вибираємо найменше з них. У другому випадку вибираємо найменше з двох значень $\sigma_p^2(0)$, $\sigma_p^2(1)$. Оптимальною часткою $\tilde{x}_1$ акцій першого виду буде значення аргументу, яке відповідає найменшому значенню σ_p^2.

Обчислимо оптимальну кількість акцій кожного виду у портфелі. Нехай інвестор вкладає в акції капітал S і ціни однієї акції кожного виду відповідно рівні C_1, C_2. Тоді оптимальні кількості акцій n_1, n_2 першого і другого виду визначаються за формулами:

$$n_1 = \left[\frac{\tilde{x}_1 \cdot S}{C_1}\right], \qquad n_2 = \left[\frac{S - C_1 \cdot n_1}{C_2}\right]$$

Тут використано позначення [N] цілої частини числа N, під яким розуміється найбільше ціле число, що не перевищує N. Наприклад, [8,7]=8.

Приклад 3. Визначити оптимальний портфель з акцій двох видів 1 та 2. Норми прибутків акцій та їх імовірності дані в таблиці 1. Ціни однієї акції кожного виду такі: $C_1 = 1{,}6$ *гр. од.*, $C_2 = 1{,}2$ *гр. од.*

Інвестиційний капітал $S = 2000$ *гр. од.*

Стан економіки	Імовірність	Норма прибутку акцій, %	
		1	2
Піднесення	0,3	15	20
Застій	0,4	6	–2
Спад	0,3	–10	–5

Розв’язок:

Обчислюємо сподівані норми прибутків акцій.

$$m_1 = 0{,}3 \cdot 15 + 0{,}4 \cdot 6 - 0{,}3 \cdot 10 = 3{,}9\%,$$

$$m_2 = 0{,}3 \cdot 20 - 0{,}4 \cdot 2 - 0{,}3 \cdot 5 = 3{,}7\%.$$

Знаходимо дисперсії норм прибутків.

$$\sigma_1^2 = 0,3 \cdot (15 - 3,9)^2 + 0,4 \cdot (6 - 3,9)^2 + 0,3(-10 - 3,9)^2 = 96,69 ,$$

$$\sigma_2^2 = 0,3 \cdot (20 - 3,7)^2 + 0,4 \cdot (-2 - 3,7)^2 + 0,3(-5 - 3,7)^2 = 115,41 ,$$

$$\sigma_1 = \sqrt{96,69} = 9,833 , \qquad \sigma_1 = \sqrt{115,41} = 10,74 .$$

Визначаємо коефіцієнт кореляції норм прибутків акцій:

$$\rho_{12} = \frac{0,3(15-3,9)(20-3,7)+0,4(6-3,9)(-2-3,7)+0,3(-10-3,9)(-5-3,7)}{9,833 \cdot 10,74} = 0,812$$

Обчислюємо величину x_1^0

$$x_1^0 = \frac{10,74(10,74 - 9,833 \cdot 0,812)}{96,69 + 115,41 - 2 \cdot 9,833 \cdot 10,74 \cdot 0,812} = 0,729 .$$

Отже, маємо перший випадок $0 < x_1^0 < 1$. Знаходимо значення $\sigma_p^2(x_1^0)$.

$$\sigma_p^2(x_1^0) = 0,729^2 \cdot 96,69 + (1 - 0,729)^2 \cdot 115,41 +$$
$$+ 2 \cdot 0,729 \cdot (1 - 0,729) \cdot 9,833 \cdot 10,74 \cdot 0,812 = 93,743$$

Оскільки $\sigma_p^2(x_1^0)$ менша, ніж $\sigma_p^2(0) = \sigma_2^2$ і $\sigma_p^2(1) = \sigma_1^2$, то $\bar{x}_1 = x_1^0$, тобто оптимальна частка акцій першого виду дорівнює 0,729.

Визначаємо оптимальну кількість акцій кожного виду в їх портфелі.

$$n_1 = \left[\frac{0,729 \cdot 2000}{1,6}\right] = 911 \text{ штук,}$$

$$n_2 = \left[\frac{2000 - 1,6 \cdot 911}{1,2}\right] = 452 \text{ штук.}$$

6.3. Портфель з довільним числом видів цінних паперів.

Нехай в портфель може включатись n видів цінних паперів. Тоді сподівана норма прибутку m_p і ризик σ_p^2 портфеля обчислюються за формулами.

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i ,$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} ,$$

Тут m_i, σ_i, x_i - відповідно сподіване значення, середнє квадратичне відхилення норми прибутку та частки цінного паперу i-того типу в портфелі, ρ_{ij} - коефіцієнт кореляції між нормами прибутків цінних паперів i-того та j-того видів, при чому $\rho_{ij} = 1$.

Математична модель задачі про мінімізацію ризику портфеля має такий вид:

$$\sigma_p^2 \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 ,\ x_i \geq 0 ,\ i = 1;2;...n .$$

Розв‘яжемо цю задачу методом множиників Лагранжа. Для цього утворимо таку функцію.

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} + \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1) .$$

Досліджуємо цю функцію на мінімум. З цією метою прирівняємо до нуля частинні похідні першого порядку даної функції відносно змінних x_i ($i = 1;2;...n$) та λ. Одержимо систему (n+1) лінійних алгебраїчних рівнянь з таким же числом невідомих.

$$\begin{cases} 2\sigma_1^2 x_1 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_2 + \ldots + 2\sigma_1\sigma_n\rho_{1n}x_n + \lambda = 0 \\ 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_1 + 2\sigma_2^2 x_2 + \ldots + 2\sigma_2\sigma_n\rho_{2n}x_n + \lambda = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\sigma_1\sigma_n\rho_{1n}x_1 + 2\sigma_2\sigma_n\rho_{2n}x_2 + \ldots + 2\sigma_n^2 x_n + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \end{cases}$$

Відмітимо, що метод Лагранжа не враховує, що $x_i \geq 0$.

Якщо всі розв‘язки x_i системи рівнянь невід‘ємні, то задача розв‘язана. Якщо деякі x_i від‘ємні, то серед них вибираємо найменше і приймаємо його рівним нулю. Тоді розв‘язуємо задачу оптимізації без цінного паперу відповідного виду. Процес вилучення “несприятливих” видів цінних паперів продовжуємо до моменту одержання решти невід‘ємних значень x_i.

Приклад 4. Сподівані норми прибутків акцій 1-го, 2-го та 3-го видів рівні відповідно 30%, 40%, 50%, їх ризики – 10%, 20%, 25%, коефіцієнти кореляції норм прибутків $\rho_{12} = 0,2; \rho_{13} = -0,3; \rho_{23} = -0,4$.

Визначити частки акцій в пакеті з мінімальним ризиком. Обчислити цей ризик та сподівану норму прибутку пакета.

Розв‘язання. Складаємо систему рівнянь для визначення часток x_1, x_2, x_3 акцій в пакеті. Вона має такий вид.

$$\begin{cases} 200x_1 + 80x_2 - 150x_3 + \lambda = 0 \\ 80x_1 + 800x_2 - 400x_3 + \lambda = 0 \\ -150x_1 - 400x_2 + 1250x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Її розв‘язок x_1=0,6111; x_2=0,1758; x_3=0,2131.

Обчислюємо ризик пакета.

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} +$$

$$+2x_1x_3\sigma_1\sigma_3\rho_{13} + x_3^2\sigma_3^2 + 2x_2x_3\sigma_2\sigma_3\rho_{23} =$$

$$= 0,6111^2 \cdot 10^2 + 0,1758^2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 0,6111 \cdot 0,1758 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 0,2 -$$

$$-2 \cdot 0,6111 \cdot 0,2131 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 0,3 + 0,2131^2 \cdot 25^2 -$$

$$-2 \cdot 0,1758 \cdot 0,2131 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 0,4 = 52,1632(\%)^2$$

, $\sigma_p = \sqrt{52,1632} = 7,2224\%$.

Знаходимо сподівану норму прибутку пакета.

$$m = x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 = 0,6111 \bullet 30 + 40 \bullet 0.1758 + 50 \bullet 0,2131 = 36,02\%$$

Розглянемо задачу про мінімізацію ризику портфеля з одержанням заданого прибутку. Математична модель цієї задачі така.

$$\sigma_p^2 \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Тут m – сподівана норма прибутку портфеля. Функція Лагранжа має вид:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} + \lambda_1(\sum_{i=1}^{n} x_i m_i - m) + \lambda_2(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$

Прирівнявши до нуля часткові похідні першого порядку функції L відносно цих змінних, одержимо наступну систему лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} 2\sigma_1^2 x_1 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_2 + \ldots + 2\sigma_1\sigma_n\rho_{1n}x_n + m_1\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_1 + 2\sigma_2^2 x_2 + \ldots + 2\sigma_2\sigma_n\rho_{2n}x_n + m_2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\sigma_1\sigma_n\rho_{1n}x_1 + 2\sigma_2\sigma_n\rho_{2n}x_2 + \ldots + 2\sigma_n^2 x_n + m_n\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = m \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \end{cases}$$

Приклад 5. З використанням числової інформації прикладу 4 потрібно визначити частки акцій в пакеті з мінімальним ризиком і сподіваною нормою прибутку m=40%.

Розв‘язання. Система рівнянь для визначення часток x_1, x_2, x_3 акцій в пакеті має вид:

$$\begin{cases} 200x_1 + 80x_2 - 150x_3 + 30\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 80x_1 + 800x_2 - 400x_3 + 40\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -150x_1 - 400x_2 + 1250x_3 + 50\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 = 40 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Її розв‘язок $x_1 = x_3 = 0,341; x_2 = 0,318$. Обчислюємо ризик пакета.

$$\sigma_p^2 = 0,341^2 \cdot 10^2 + 0,318^2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 0,341 \cdot 0,318 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 0,2 -$$

$$-2 \cdot 0,341^2 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 0,3 + 0,341^2 \cdot 25^2 - 2 \cdot 0,318 \cdot 0,341 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 0,4 =$$

$$= 72,6108(\%)^2, \sigma_p = 8,5212\%$$

Отже, в пакет з мінімальним ризиком 8,5212% і сподіваною нормою прибутку 40% потрібно включити по 34,10% окцій першого і третього видів та 31,8% другого.

Зрозуміло, що залучення до портфеля, котрий складався лише з одного виду акцій, другого виду акцій, приводить до зниження ризику при одночасному зростанні норми прибутку

Такі дії інвестора називається диверсифікацією.

Розрізняють:

- “наївну” – без використання коефіцієнта ρ_{12},
- “розсудливу”–з врахуванням ρ_{12},.

5.3 Портфель з багатьох акцій.

Перейдемо до загального випадку, коли до складу портфеля залучено багато різних акцій.

n – кількість різних акцій залучених до портфеля.;

m_i – сподівана норма прибутку *i*-ої акції;

G_i –ризик *i*-ої акції;

ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції *i*-ої та *j*-ої акції;

x_i - частка *i*-ої акції залученої до портфеля.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = 1$$

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \qquad 5.3.1$$

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \qquad 5.3.2$$

$$\sigma_p = \sqrt{D_p} \qquad 5.3.3$$

Ризик портфеля, можна трактувати, як суму двох складових . перша складова віддзеркалює індивідуальний ризик кожної з акцій.

Оскільки це середньозважена варіацій (дисперсій) окремих акцій (вагомими коефіцієнтами виступають квадрати часток акцій в портфелі);

друга складова характеризується взаємозв'язками між парами акцій, тобто показує вплив коефіцієнтів кореляції пар акцій на ризик портфеля;

від'ємні величини коефіцієнтів кореляції призводять до зменшення варіації портфеля.

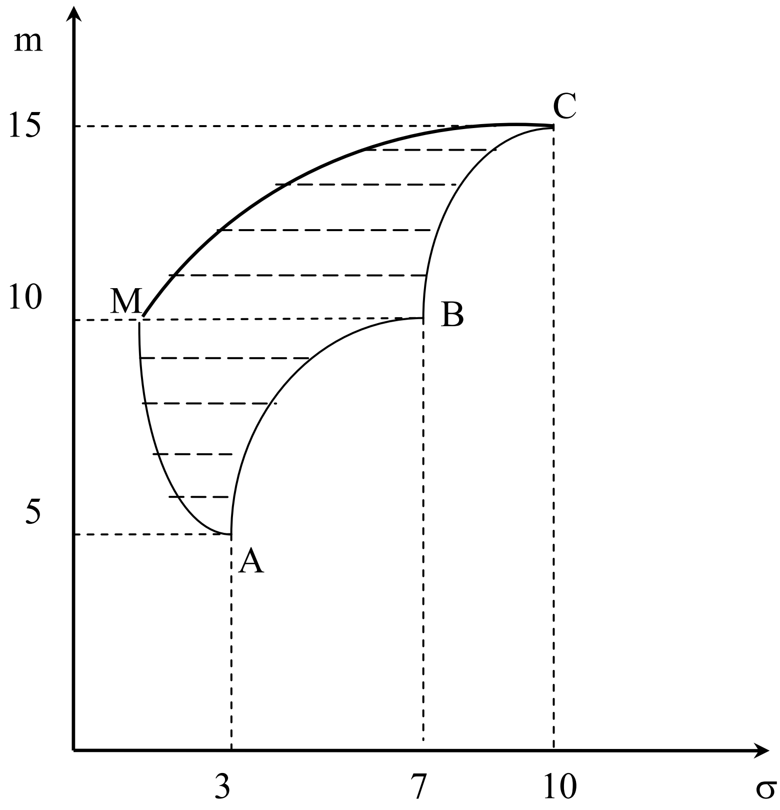
Приклад: дано акції ***A***: m_1=5%, σ_1=3%, ρ_{12}=0,6;

B: m_2=10%, σ_2=7%, ρ_{13}=0,2;

C: m_3=15%, σ_3=10%, ρ_{23}=-0,4. визначити допустиму множину портфелів.

Розв'язання: побудуємо графік.

З малюнка видно, що кожен розсудливий інвестор обере будь-який з портфелів, що належать [MC], бо будь-якої іншої точки, що належить даній фігурі (таких, що не належать MC) знайдеться



відповідна точка з MC, для якої при тому ж значенні величини ризику, норма прибутку буде більшою.

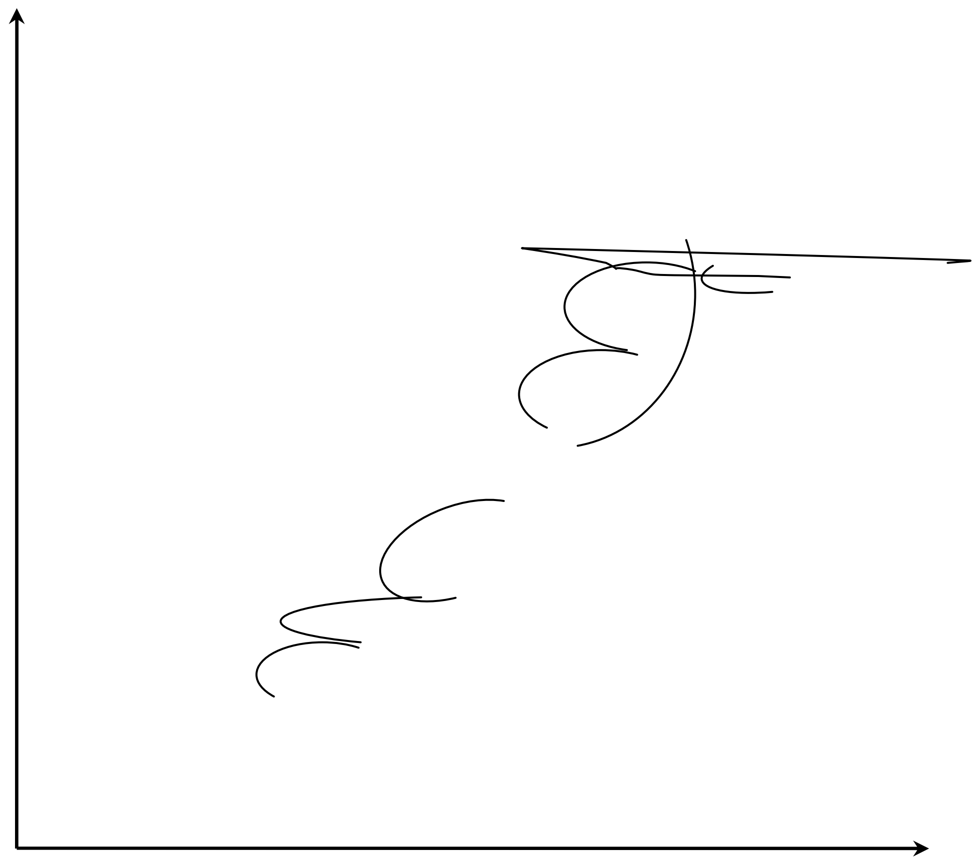
Заштрихована область, точки котрої характеризують ступінь ризику та норму прибутку портфеля за всіх можливих часток окремих акцій в портфелі, називаються допустимою множиною портфелів.

Множина точок MC – називається ефективною множиною портфелів. Тобто ефективним портфелем з допустимої множини буде такий, для якого не існує іншого:

- з тим самим значенням величини норми прибутку і меншим ступенем ризику;
- з тим самим значенням величини ризику і більшим значенням норми прибутку.

Нехай ми маємо *n* різних цінних паперів, кожна пара яких пов’язана між собою певною кореляційною залежністю.

Допустима множина портфелів сформованих цих цінних паперів така:



де відрізок кривої MN характеризує ефективну множину портфелів.

Опуклість кривої MN, яка характеризує ефективну множину випливає з того, що лінійна комбінація двох портфелів є також портфелем.

Для двох менеджерів побудовані відповідні функції корисності, криві ліній байдужості для I і II менеджера.

Вибір найкращого портфеля з множини, що відповідають множині точок кривої MN, буде залежати від функції корисності (схильності або несхильності до ризику).

Менеджер I обере портфель позначений точкою N_1, яка відповідає найбільшому значенню його корисності на ефективній множині портфелів.

Менеджер II, що більш схильний до ризику, обере портфель з ефективної множини, точка N_2.

4.4 Спрощена класична модель формування портфеля.

Найпростішою математичною моделлю наближених розрахунків є однофакторна модель Вільяма Шарпа.

Ця модель на залежності норм прибутків більшості акцій від одного чинника - чинника ринку (біржі).

В основному при зростанні ринкових індексів зростають і ціни більшості акцій і навпаки. Це дозволяє висунути гіпотезу про те, що норми прибутків акцій щільно корельовані відносно загального біржового індексу.

Цей індекс можна трактувати як, гіпотетичний цінний папір, ціна якого коливається і для якого можна визначити норму прибутку та варіацію.

Кореляційна залежність норми прибутку звичайної акції від норми прибутку індексу має вигляд:

$$m_i = a_i + \beta_i m_m + e_i \qquad 22$$

де : m_m -сподівана норма прибутку ринку ;

a_i - параметри рівняння регресії;

β_i - випадкова складова (випадкові чинники) .

Це формула харектиристичної лінії цінного паперу.

Важливою складовою є β_i - коефіцієнт бета – вказує на скільки відсотків наближено зросте чи знизиться норма прибутків акцій, коли норма прибутку ринку зросте (знизиться) на 1%. Тобто, це означає, що коефіцієнт β певної акції показує, в якій мірі норма прибутку акції реагує на зміни що відбуваються на ринку в цілому. Коефіцієнт β може трактуватись як міра ринкового ризику певної акції.

Наведемо кілька простих прикладів:

1. β_i=0 – норма прибутку даного цінного паперу ніяк не реагує на зміни на ринку, тобто не обтяжений ринковим ризиком (державна облігація).

2. 0<β_i<1 – досить помірковано реагує на зміни що відбуваються на ринку цінних паперів – називається дефективною (захищеною) акцією.

3. β_i=1 - норма прибутку даної акції змінюється так само як і норма прибутку ринку.

4. β_i>1 – норма прибутку акції значною мірою залежить від змін на ринку. Таку акцію називають агресивною.

В розвинутих країнах ряд журналістів друкують β багатьох акцій.

Приклад 4.4.1**:**

Візьмемо акцію, характеристична лінія котрої подана наступним рівнянням:

$$m_i = 3{,}1 + 1{,}3 m_M + e_i$$

Наведене рівняння показує, що зміна ринкового (біржового) показника на 1% призводить до зміни норми прибутку даної акції приблизно на 1,3%. Тобто, ця акція значно реагує на зміни ринку ЦП.

Отже чим більший β - тим більший ступінь реагування норми прибутку акцій на зміни норм прибутку ринку.

Важливим завданням є визначення Х-оні лінії цінного паперу. Для того використовують інформацію за минулі періоди та метод найменших квадратів.

У випадку застосування м н к (не вдаючись в деталі) одержимо наступні рівняння для визначення α та β:

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_M)}{D(R_M)} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - m_i)(R_{мt} - m_м)(T-1)}{\sum_{t=1}^{T}(R_{мt} - m_м)^2 (T-1)} \qquad 23$$

$$a_i = m_i - \beta_i m_м \qquad 24$$

де cov(Ri, Rм) – __________між і-ю акцією і нормами прибутку ринку;

D (Rм) – дисперсія ринкової норми прибутку ЦП,

T – кількість періодів, за які береться відповідна інформація,

Rit – норма прибутку і-ї акції в t-му періоді;

Rмt – норма прибутку показника ринку в t-му періоді,

mi – сподівана норма прибутку і-ї акції,

mм – сподівана ринкова норма прибутку.

У даному випадку:

$$m_i = (\sum_{t=1}^{T} R_{it}) / T \qquad 25$$

$$m_м = (\sum_{t=1}^{T} R_{мt}) / T \qquad 26$$

$$D_м = \sum_{t=i}^{T} (R_{мt} - m_м)^2 / (T-1) \qquad 27$$

(дисперсія показника ринку)

$$D_{et} = \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - a_i - \beta_i R_{мt})^2 / T - 1 \qquad 28$$

(дисперсія випадкової складової, що відповідає і-й акції)

Дана модель дає можливість обчислити показники залежності:

$$m_i = a_i + \beta_i m_м \qquad 29$$

$$D_i = \beta_i^2 - D_н^2 + B_{et}^2 \qquad 30$$

$$S_{ij} = (\beta_i \beta_j D_н^2) / G_i G_j \qquad 31$$

mi – норма прибутку і-ї акції,

Di – дисперсія і-ї акції;

Ret – дисперсія випадкової складової, що відповідає і-й акції;

Sij – коефіцієнт кореляції і-ї та j-ї акції.

Формула (30) вказує, що ризик акції яким вона обтяжена, може бути представлена сумою двох складових. Перша складова, що залежить від варіації показника ринку, відображає ризик ринку – системний ризик. Друга складова, будучи варіацією випадкової складової, відображає специфічний ризик, що пов’язаний з даною акцією.

Поняття системного ризику (ризику ринку) і специфічного ризику має безпосередній зв’язок з диверсифікацією.

Вміла методика формування портфеля дозволяє суттєво знизити специфічний ризик. Однак залишається ризик ринку, який може мати певний ступінь в складі всіх акцій портфеля, вилучити потрібні вдається шляхом диверсифікації.

Необхідно зазначити: якщо певну фірму трактувати як множину окремих груп активів, то користуючись викладеним вище, можна обчислити вплив інвестиційних проектів на β фірми в цілому. А, отже на систематичний ризик, ціну власного капіталу, а також середньозважену ціну капіталу.

4.5. Загальні засади теорії портфеля, оптимізація його структури.

Подамо лише постановку та класичний розв'язок задачі.

Rit – норма прибутку від i-го цінного паперу за період t

t – період спостереження

T – обсяг вибірки (кількість спостережень)

n – кількість видів цінних паперів

Rpt – норма прибутку

xi – частка інвестицій

$$R_{pt} = \sum_{i=1}^{n} x_i R_{it} \quad \mathbf{32}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \mathbf{33}$$

$$m_p = M(R_{pt}) = M\sum_{i=1}^{n} x_i R_{it} = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \quad \mathbf{34}$$

де

$$m_i = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_{it}$$

$$Dp = dl\left\{\left(R_{pt} - m_p\right)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij} \quad 35$$

$$D_i = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - m_i)^2 \quad 36$$

(дисперсія норми прибутку *i*-го цінного паперу)

$$D_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - m_i)\cdot(R_{jt} - m_j) \quad 37$$

(коваріація між нормами прибутку *i*-го та *j*-го ЦП) або

$$D_{ij} = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \quad 38$$

$$S_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - m_i)(R_{jt} - m_j)}{(T-1)\sigma_i \sigma_j} \qquad 39$$

Нехай норма прибутку ЦП з фіксованим відсотком = R_F. Сподівана норма прибутку m_F також = R_F. Тобто m_F=R_F, а ризик $\sigma_F = 0$. Інвестуючи капітал у цінні папери, обтяжені ринковими коливаннями (ризиком).прагнуть отримати найкраще співвідношення між додатковим прибутком і зростаючим ступенем ризику.

Найкраще співвідношення між приростом норми прибутку і зростанням ризику забезпечує портфель ЦП.

$$\varphi = (m_p - R_F)/\sigma_P \qquad 40$$

за умови: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

Введемо обмеження до цільової функції φ. Для цього запишемо R_F, як:

$$R_F = 1 \cdot R_F = (\sum_{i=1}^{n} x_i)R_F = \sum_{i=1}^{n} x_i R_F \qquad 41$$

Зробимо підстановку, отримаємо:

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (m_i - R_F)}{\sqrt{\sum x_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}} \qquad 42$$

Необхідно коефіцієнти x_i, максимізують цю функцію. Цього можна досягнути за допомогою коли взяти похідну функції по x і прирівняти до нуля.

Отримаємо:

$$x_s = \frac{y_s}{\sum_{s=1}^{n} y_s}, \qquad s = \overline{1,n} \qquad 47$$

Величини x_s визначають оптимальну структуру портфеля при заданому наборі ЦП і нормі прибутку R_F щодо паперу з фіксованим відсотком.

Проте при знаходженні розв'язків системи 45 деякі x_s, можуть бути від'ємними.

В цьому випадку:

1. або вважають, що $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ і розв'язують дану задачу методом квадратичного програмування;
2. або не накладають умови невід'ємності, вважають, що x_i означає, що відповідні цінні папери необхідно продати на термін без покриття, тобто при їх відсутності у продавця на час продажу. Це гра на пониження

В загальному вигляді задача щодо оптимального інвестування в цінні папери допускає як позику, так і надання кредитів.

Позика – збільшує ресурси для інвестування а кредит – інвестування під фіксований відсоток.

Для спрощення вважають, що і кредит і позика здійснюється за тим же відсотком $R_{F.}$

Припустимо, що інвестор вирішив вкласти частину своїх засобів у певний портфель Е і крім цього надати кредит, чи взяти в борг під фіксований відсоток $R_{F.}$

Проаналізуємо:

Нехай х – частка від позичкового капіталу, котру інвестор розмісти у вигляді портфеля Е. (Х може бути і > 1, тобто користуються позичкою), тоді (1 – х) – частка засобів розміщених під фіксований відсоток.

Тоді сподівана норма прибутку від комбінацій з позичково-кредитною операцією буде визначена:

$$m_p = (1-x)R_F + xm_E \qquad 48$$

ризик $\sigma = ((1-x)^2\sigma_F^2 + x^2\sigma_E^2 + 2x(1-x)\sigma_{EF})^{\frac{1}{2}}$, де 49

$\sigma_F = 0$, і отже $\sigma_{EF} = 0$, тобто $\sigma_p = x\sigma_E$ ризик портфеля 50

Тоді $x = \sigma_p / \sigma_E$ а сподіваний прибуток:

$$m_p = R_F(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_E}) + \frac{\sigma_p}{\sigma_E} m_E$$

$$m_p = R_F - \frac{m_E - R_F}{\sigma_E}\sigma_p \qquad 51$$

це є рівняння прямої і називається *лінією ринку капіталів* і характеризує портфелі, так із цінних паперів обмежених ризиком.

Коли відсутня позиково-кредитна операція, то x = 1, $m_p = m_E$, і $\sigma_p = \sigma_E$.
точка E лежить на MN (можна ефективних портфелів) і дотичній до цієї кривої прямій R_FE.

точкаE (σ_E, m_E) – називається ринковим портфелем.

На комбінації фінансового портфеля E із позичково-кредитними операціями з фіксованими відсотками вздовж прямої у просторі $\sigma_p - m_p$.

Відрізок R_FE відображає рішення інвестувати певну частку власних засобів в портфель E, а іншу частку віддати у вигляді позички під фіксований відсоток R_F. Вздовж [EK] розташовані рішення щодо позички додаткових засобів, а весь сумарний капітал інвестується в портфель E.

Приклад. 4.5.1. Норма прибутку безризикових цінних паперів складає 15%, сподівана норма прибутку ринкового портфеля 40%, він обтяжений ризиком $\sigma_E = 5\%$. Визначити сподівану норму прибутку інвестора при різних значеннях ризику.

$\sigma_P = 0\%$ $\quad mp = 15 + \frac{40-15}{5}\sigma p = 15$

$\sigma_P = 4\%$ $\quad mp = 35$

$\sigma_P = 10\%$ $\quad mp = 65.$

5. Використання, теорії гри та статистичних рішень до моделювання ризику

5.1. Моделювання економічного ризику

Ситуація прийняття рішення в умовах невизначеності та породженого нею ризику передбачає наявність трьох елементів:

1. Концептуальної інформаційної моделі;
2. Ідентифікованої інформаційної ситуації;
3. Критерію (чи системи критеріїв) прийняття рішення.

Одним з підходів є концепція на базі застосування теоретико-ігрової моделі.

Під теорією ігор розуміють теорію математичних моделей та методів прийняття раціональних рішень за умов конфлікту та невизначеності.

Конфліктні ситуації характеризуються наявністю декількох суб’єктів, що мають різні цілі. Але важливо пам’ятати, що під час вибору рішення за умов невизначеності неможливо уникнути певного суб’єктивізму та елемента ризику.

Предметом теорії рішень за умов ризику є дослідження законів перетворення апріорної та апостеріорної інформації про стан об’єкта та середовища в кількісні характеристики інформації керування.

Ширико відомою моделлю прийняття рішень за умов невизначеності є статистична модель. Згідно з концепцією теорії ігор визначають основні елементи прийняття рішень невизначеності та ризику.

Згідно з концепцією теорії гри ситуація прийняття рішення характеризується множиною $\{X;\theta;F\}$ де

X – множина рішень (стратегій) суб’єкта керування (1-го гравця)

θ– множина станів (стратегій) економічного середовища (*ЕС*) (2-го гравця).

$F=\{f(x,\theta);x\epsilon X;\theta\epsilon\theta\}$ - функціонал оцінювання (ФО), визначений на множині $X\times\theta$, і ф-ція $f(x,\theta)$ - ф-ція виграшу 1-го гравця (суб’єкта керування).

Під економічним середовищем (ЕС) надалі будемо розуміти сукупність невизначених чинників (у тому числі й економічних), які впливають на ефективність рішення, що приймається.

У дискретному випадку ЕС являє собою повну групу взаємовиключаючих та взаємодоповнюючих випадкових подій:

$$\theta=\{\theta_1;\theta_2;\cdots;\theta_n\}\quad \theta=\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n$$

$$P(\theta)=P(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=P(\theta_1)+P(\theta_2)+\cdots+P(\theta_n)=$$
$$=p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$

Ситуація прийняття рішень характеризується матрицею, елементи котрої є f_{kj} - кількісні оцінки прийнятого рішення $x_k \in X$ за умови, що середовище знаходиться у стані θ_j.

$$F = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \cdots & \theta_j & \cdots & \theta_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1j} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{k1} & \cdots & f_{kj} & \cdots & f_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mj} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

де F назв. функціоналом оцінювання.

Приклад 1.

Фруктовий дилер скуповує у селян малину по 10$ за кошик і продає у місті по 20$. Протягом кожного з 40 днів „малинового сезону" він продав різну кількість кошиків. Це обумовлено випадковістю попиту на цей товар. Дилер помітив, що попит обсягом 3 кошики спостерігався 5 днів; 4 кошиків – 7 днів, 5 – 15 днів, 6 – 11 днів, 7 – 2 дні. Проблема, що виникла у діяльності дилера, - це оптимальний (з позиції отримання прибутку) вибір кількості кошиків, які він повинен закуповувати щодня.

Розв'язування: Для вирішення проблеми, що постала перед дилером, попередньо побудуємо функціонал оцінювання. А тому в якості множини рішень (проектів) X вибираємо обсяг одноразової закупівлі малини (число коштів), в якості економічного середовища $\theta-$ попит на цю продукцію. Очевидно, що дилеру недоцільно купувати менше ніж три й більше, ніж сім кошиків, а тому $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,\}$, де x_i – рішення про закупку i+2 кошиків малини, $i = \overline{1,5}$. Очевидно, що множина станів ЕС (попит) теж складається з п'яти елементів: $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\}$, де θ_i - попит на i +2 кошики малини, $i = \overline{1,5}$.

Побудову функціоналу оцінювання (ФО) здійснимо на основі таких міркувань. Якщо дилер придбає на один кошик малини більше, ніж продає, то на цьому він втратить 10$, оскільки вередливий покупець не буде купувати „вчорашню" малину. Якщо ж він придбає на один кошик менше, то нічого не втратить, оскільки всі збитки будуть відшкодовані. Однак він міг би отримати більше, якби мав ще один кошик малини. Цей прибуток становив би 10$. Значить дилер не використав усі свої можливості. Відповідні розрахунки заносимо в таблицю.

Таблиця відображає (ФО) значення прибутків, які дилер може отримати при різних варіантах закупки товару і попитом на нього. Наприклад, число 40 на перетині рядка x_4 та стовпчика θ_3 показує значення прибутку дилера за умови, що він придбав 6 кошиків малини, а попит – 5 кошиків. Значить із п'яти кошиків прибуток дилера – 50$, а шостий кошик принесе збиток величиною 10$, тобто 40=50-10

Таблиця1.

Рішення (к-сть закуплених кошиків)	Стани ЕС (попит в кошиках)				
	θ$_1$ (3 кошики)	θ$_2$ (4 кошики)	θ$_3$ (5 кошики)	θ$_4$ (6 кошики)	θ$_5$ (7 кошики)
x_1 (3 кошики)	30	30	30	30	30
x_2 (4 кошики)	20	40	40	40	40
x_3 (5 кошики)	10	30	50	50	50
x_4 (6 кошики)	0	20	40	60	60
x_5 (7кошики)	-10	10	30	50	70

У якості розподілу ймовірності станів ЕС можна використати відповідні відносні частоти настання цих випадкових подій:

$$p_1 = P(\theta = \theta_1) = \frac{5}{40} = 0{,}125,\ p_2 = \frac{7}{40} = 0{,}175,$$

$$p_3 = \frac{15}{40} = 0{,}375,\ p_4 = \frac{11}{40} = 0{,}275,\ p_5 = \frac{2}{40} = 0{,}05,$$

Щодо прийняття рішення, то воно може бути здійсненим дилером на базі одного з критеріїв оптимальності, які будуть розглянуті згодом.

Вважають, що функціонал оцінювання F має позитивний інгредієнт, якщо намагаються досягнути $\max\limits_{x_k \in X}\{f_{kj}\}$.

Для цих випадків записують $F = F^+ = \{f_{kj}{}^+\}$. Для негативного інгредієнта, якщо намагаються досягнути $\min\limits_{x_k \in X}\{f_{kj}\}$, відповідно записують $F = F^- = \{f_{kj}{}^-\}$.

Визначення функціоналу оцінювання у формі $F = F^+$, як правило, використовується для оптимізації категорій корисності, виграшу, ефективності, імовірності досягнення цільових подій тощо. У формі $F = F^-$ - використовують для оптимізації збитків, ризику тощо.

Функція ризику визначається як лінійне перетворення позитивно чи негативно заданого інгредієнта ФО до відносних одиниць вимірювання. Таке перетворення встановлює порядок відліку ФО для кожного сталу ЕС

1)для $F = F^+$, коли мають зафіксований стан економічного середовища $\theta_j \in \theta$, знаходять величину

$$l_j = \max_{x \in X} f_{kj}{}^+; \quad j = \overline{1,n}; \quad k = \overline{1,m}$$

і функція ризику визначається у вигляді

$$r_{kj} = \tau_j \cdot (x_k) = l_j - f_{kj}^{+}$$

1) для $F = F^{-}$ при фіксованому $\theta_j \in \theta$ знаходять

$$l_j = \min_{x \in X} f_{kj}^{-};\ j = \overline{1,n}\ ;\ k = \overline{1,m}$$

і функція ризику визначається як

$$r_{kj} = r_j \cdot (x_k) = \overline{f_{kj}} - l_j,\ j = \overline{1,n}\ ;\ k = \overline{1,m};$$

У дискретному випадку, коли $X = \{x_1,\ x_2 \ldots,\ x_n\}$ та $Q = \{Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n\}$, у якості ФО можна використовувати матрицю ризику:

$$\overline{R} = \left\{ r_{kj}\left(x_k; \theta_j\right); k = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}; \right\}$$

Вона дає змогу оцінити кількісно відмінні рішення та встановити, наскільки вигідно реалізуються в них існуючі можливості досягнення успіху за наявності ризику. А тому її можна назвати також матрицею невикористаних можливостей.

<u>Приклад</u> 2.

Для ФО, отриманого у прикладі 1 побудувати матрицю невикористаних можливостей.

Розв'язання:

Так як ФО, отриманого у прикладі 2 відображає прибутки фруктового дилера, то він має позитивний інградієнт $\left(F = F^{+}\right)$. Оскільки, $l_j(\theta_1) = \max\{30;20;10;0;-10\} = 30$, то отримуємо:

$$r_{11}^{-} = l_j - f_{11} = 30 - 30 = 0, \quad r_{21} = 30 - 20 = 10,$$

$$r_{31} = 30 - 10 = 20, \quad r_{41} = 30 - 0 = 30, \quad r_{51} = 30 - (-10) = 40$$

Враховуючи, що

$$l_j(\theta_2) = 40 \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad l_j(\theta_3) = 50, \quad l_j(\theta_4) = 60, \quad l_j(\theta_5) = 70$$

за допомогою аналогічних перетворень отримуємо решту стовпців матриці R

$$R = R^{-} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 & 40 \\ 10 & 0 & 10 & 20 & 30 \\ 20 & 10 & 0 & 10 & 20 \\ 30 & 20 & 10 & 0 & 10 \\ 40 & 30 & 20 & 10 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Елемент $r_{24}^{-} = 20$ матриці R вказує на те, що дилер через неправильне визначення попиту на малину недотримав 20$ (попит θ_4 становив 6 кошиків, а закуплено було тільки 4 кошики (x_2)). У свою чергу, елемент $r_{43}^{-} = 10$ вказує на те, що дилер неправильно спрогнозував ситуацію і зазнав збитків в 10$, оскільки один кошик малини йому не вдалося продати.

Якість рішення, яке приймається, а також методика його прийняття, залежать від ступеня інформованості суб'єкта керування.

Під інформаційною ситуацією *(ІС)* з погляду суб'єкта керування (залежно від ступеня його інформованості) розуміють певний ступінь градації невизначеності вибору середовищем своїх станів у момент прийняття рішення.

Класифікатор інформаційних ситуацій, пов'язаних з невизначеністю середовища, можна побудувати таким чином:

I_1 - перша *ІС*. Характеризується заданим законом розподілу апріорних імовірностей на елементах множин θ (достатня за обсягом інформація);

I_2 - друга *ІС*. Характеризується заданим законом розподілу імовірностей з точністю до невідомих параметрів (достатня за обсягом інформація);

I_3 - третя *ІС*. Характеризується заданою системою (лінійних чи не лінійних) співвідношень на компонентах апріорного розподілу ймовірностей станів *ЕС* (обсяг інформації про *ЕС* недостатній);

I_4 - четверта *ІС*. Характеризується невідомим розподілом ймовірностей на елементах множин θ (інформація про *ЕС* відсутня);

I_5 - п'ята *ІС*. Характеризується антагоністичними інтересами *ЕС* у процесі прийняття рішень (обсяг інформації про *ЕС* достатній);

I_6 - шоста *ІС*. Характеризується як проміжна між I_1 та I_5 при виборі *ЕС* своїх станів.

Таким чином, наведені інформаційні ситуації є глобальними характеристиками ступеня невизначеності станів *ЕС* з погляду суб'єкта керування.

Під критерієм прийняття рішення розуміють алгоритм, який визначає для кожної ситуації прийняття рішення $\{X;\theta;F\}$ та *ІС* єдине оптимальне рішення $x^* \in X$ або множину таких розв'язків $X^* \subset X$.

Перша інформаційна ситуація (I_1).

Критерій Байєса або критерій середньозваженого (сподіваного) прибутку, затрат, ризику тощо.

Згідно з критерієм Байєса у випадку, коли $F = F^+$, оптимальним рішенням x_{ko} вважається таке, для якого математичне сподівання відповідного вектора оцінювання досягає найбільшого можливого значення, тобто x_{ko} знаходять, виходячи з умови:

$$x_{k_0} : B^+\left(x_{k_0} : P\right) = \max_{x_k \in X} F^+\left(x_k : P\right) = \max_{x_k \in X} M\left(F^+\right) = \max_{x_k \in X}\left[\sum p_j f_{k_j}^+\right]$$

Якщо ж $F = F^-$,то оптимальне рішення визначається, виходячи з умови

$$x_{k_0} : B^-\left(x_{k_0}, P\right) = \min_{x_k \in X} F^-\left(x_k, P\right) = \min_{x_k \in X} M\left(F^-\right) = \min_{x_k \in X}\left[\sum p_j f_{k_j}^-\right]$$

<u>Приклад</u> 3.

Виходячи з умови задачі про фруктового дилера (приклад 1), знайти рішення, яке є оптимальним з позиції критерію Байєса.

Розв'язання: Розподіл імовірності станів *ЕС* був установлений під час розв'язання прикладу 2: $P = \{0{,}125; 0{,}175; 0{,}375; 0.275; 0{,}05\}$.

Знаходимо оцінки Байєса для відповідних рішень:

$$B_1^+ = B^+(x_1, P) = M(F_1^+) = 30 \cdot 0{,}125 + 30 \cdot 0{,}175 +$$
$$+ 30 \cdot 0{,}375 + 30 \cdot 0{,}275 + 30 \cdot 0{,}05 = 30$$
$$B_2^+ = B^+(x_2, P) = M(F_2^+) = 37{,}5$$
$$B_3^+ = B^+(x_3, P) = M(F_3^+) = 41{,}5$$
$$B_4^+ = B^+(x_4, P) = M(F_4^+) = 38$$
$$B_5^+ = B^+(x_5, P) = M(F_5^+) = 29$$

Оскільки ФО має позитивний інградієнт ($F = F^+$), то з урахуванням того, що $\max\{B_1^+; B_2^+; B_3^+; B_4^+; B_5^+;\} = 41{,}5 = B_3^+$. Оптимальний для дилера згідно з критерієм Байєса є рішення x_3 – закупка 5 кошиків малини.

Якщо ж тепер в якості ФО використати матрицю невикористаних можливостей R^- (приклад 3), то отримаємо Байєсівські ризики для відповідних рішень:

$$B_1^- = B^-(x_1, P) = M(R_1^-) = 0 \cdot 0{,}125 + 10 \cdot 0{,}175 +$$
$$+20 \cdot 0{,}375 + 30 \cdot 0{,}275 + 40 \cdot 0{,}05 = 19{,}5$$
$$B_2^- = B^-(x_2, P) = M(R_2^-) = 12$$
$$B_3^- = B^-(x_3, P) = M(R_3^-) = 8$$
$$B_4^- = B^-(x_4, P) = M(R_4^-) = 11{,}5$$
$$B_5^- = B^-(x_5, P) = M(R_5^-) = 20{,}5$$

Оскільки функціонал оцінювання $R=R^-$ має негативний інградієнт, $\min\{B_1^-;\ B_2^-;\ B_3^-;\ B_4^-;\ B_5^-;\} = 8 = B_3$ то (як і раніше) робимо, висновок про оптимальність рішення x_3 (на цей раз – з позиції Байєсівського ризику).

Друга інформаційна ситуація *(I_2)*.

Згідно з класифікатором ця ситуація характеризується заданим законом розподілу ймовірностей з невідомими параметрами. При наявності достатньої за обсягом статистичної інформації здійснюється оцінка параметрів розподілу. Після цього встановлюється розподіл ймовірностей станів *ЕС*. Для оцінки параметрів закону розподілу можна скористатись відповідними методами, наприклад, методом найменших квадратів, методом максимальної правдоподібності тощо.

Після того, як уточнені значення параметрів, що характеризують закон розподілу, здійснюється оцінка відповідних ймовірностей.

Третя інформаційна ситуація *(I_3)*.

Для цієї *ІС* характерним є те, що апріорі закон розподілу ймовірностей станів *ЕС* невідомий, але відомі деякі лінійні співвідношення на його компонентах. На практиці для оцінки значень ймовірностей (будемо їх позначати на відміну від точних значень, через $\widehat{p}_j;\ j = \overline{1,n}$) при зроблених певного ряду допущеннях щодо апріорного розподілу, мають широке використання формули Фішберна.

На основі вербальної (чи статистичної) інформації здійснюється суто якісне відображення пріоритету щодо станів *ЕС*. Якщо для кожних двох станів θ_{is} та θ_{ik} є підстави вважати, що $\theta_{is} > \theta_{ik}$ (чи $\theta_{ik} > \theta_{is}$) $s,k=\overline{1,n}$, то можна побудувати ряд пріоритетів що до всіх станів *ЕС* $RI=\left[\theta_{i1};\ \theta_{i2};\ \dots;\ \left[\theta_{ij};\ \theta_{ij+1}\right];\dots\ ;\ \theta_{in}\right]$ де θ_{i1} - стан з найвищим пріоритетом (з найбільшої імовірністю настання); θ_{in} - з найнижчим (з найменшою імовірністю настання); внутрішніми квадратними дужками у формулі відзначені рівнозначні стани $\theta_{ij} \approx \theta_{ij+1}$ (з однаковими ймовірностями настання $p_{ij} = p_{ij+1}$). Отже, згідно з побудованим рядом пріоритетів $p_{i1} \ge p_{i2} \ge \dots \ge p_{in}$ (говорять також, що має місце просте лінійне співвідношення впорядкованості). Для даної ситуації Фішберн висунув гіпотезу, що для практичних досліджень іноді достатньо детально вибрати оцінки $\widehat{p}_{ij}$ апріорних ймовірностей p_{i1} у вигляді спадної арифметичної прогресії, і показав, що їх можна обчислювати за формулою: $P\left(\theta=\theta_{ij}\right)=p_{ij} \approx \widehat{p}_{ij}=\dfrac{2\left(n-j+1\right)}{n\left(n+1\right)}$ (*)

<u>Приклад</u> 4.

Виходячи з умови задачі про фруктового дилера (приклад 1.) побудувати ряд пріоритетів щодо попиту, оцінити відповідні ймовірності і згідно з критерієм Байєса прийняти оптимальне рішення.

Розв'язання:

Виходячи з наявних у дилера статистичних даних (швидше всього – недостатніх за обсягом) будуємо ряд пріоритетів щодо частоти попиту (кількості кошиків): $RI=\left\{5;\ 6;\ 4;\ 3;\ 7\right\}=\left\{\theta_3;\ \theta_4;\theta_2\ ;\theta_1\ ;\theta_5\ ;\right\}$ тобто i_1=3; i_2=4; i_3=2; i_4=1; i_5=5 тоді згідно з формулою (*) $P\cdot\left(\theta=\theta_{ij}\right)=p_{ij} \approx \widehat{p}_{ij}=\dfrac{2\left(n-j+1\right)}{n\left(n+1\right)}$ при n =5

$$\widehat{p}_{i1}=\frac{2\left(5-1+1\right)}{5\left(5+1\right)}=\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$$

отримуємо:
$$\widehat{p}_{i2}=\frac{2\left(5-2+1\right)}{5\left(5+1\right)}=\frac{4}{15}$$

$$\widehat{p}_{i3}=\frac{3}{15},\ \widehat{p}_{i4}=\frac{2}{15},\ \widehat{p}_{i5}=\frac{1}{15}$$

Використовуючи отримані оцінки ймовірностей, приходимо до наступних оцінок Байєса:

$$B_1^+ \approx B^+\left(x_1;\widehat{p}\quad\right)=30\cdot\frac{2}{15}+30\cdot\frac{3}{15}+30\cdot\frac{5}{15}+30\cdot\frac{4}{15}+30\cdot\frac{1}{15}=30$$

$$B_2^+ \approx 20\cdot\frac{2}{15}+40\cdot\frac{3}{15}+40\cdot\frac{5}{15}+40\cdot\frac{4}{15}+40\cdot\frac{1}{15}=\frac{700}{15}=37,33$$

$$B_3^+ \approx 10\cdot\frac{2}{15}+30\cdot\frac{3}{15}+50\cdot\frac{5}{15}+50\cdot\frac{4}{15}+50\cdot\frac{1}{15}=40,66$$

$$B_4^+ \approx 37,33$$

$$B_5^+ \approx 28,66$$

Отже, згідно з критерієм Байєса оптимальним є рішення x_3 (закупка 5 кошиків малини).

Четверта інформаційна ситуація *(I_4)*.

Для цієї *ІС* характерним є повне незнання закону розподілу ймовірностей станів *ЕС,* а тому вибір розподілу повинен базуватись на певних допущених (гіпотезах).

У якості одного з таких допущень можна використати принцип Бернуллі - Лапласа (принцип недостатніх підстав), згідно з яким можливі стани економічного середовища розглядаються як рівно ймовірні випадкові події, якщо відсутня інформація про умови, за яких кожен стан може відбутися.

Критерій Бернуллі - Лапласа ґрунтується на застосуванні критерію Байєса та принципі недостатніх підстав для одержання оцінок апріорних імовірностей. Згідно з цим критерієм у випадку, коли $F = F^+$, оптимальним є рішення:

$$x_{k_0} : B^+\left(x_{k_0}; \widehat{p}\right) = \max B^+\left(x_k; \widehat{p}\right),$$

де $B^+\left(x_k : \widehat{p}\right) = \dfrac{1}{n}\sum f_{k_j}^+;\ \widehat{p} = \left\{\dfrac{1}{n};\ldots,\dfrac{1}{n}\right\}$.

Аналогічно, будується критерій у випадку, коли функціонал оцінювання має негативний інгредієнт ($F = F^-$).

Приклад 5.

Виходячи з умови задачі про фруктового дилера (приклад 1), а також з того, що дилеру відома лише тривалість „малинового” сезону (40 днів) і те, що попит на малину може становити від 3 до 7 кошиків, прийняти оптимальне рішення.

Розв’язування. Згідно з критерієм Бернулі –Лапласа отримуємо:

$$\widehat{p}_1 = \widehat{p}_2 = \widehat{p}_3 = \widehat{p}_4 = \widehat{p}_5 = \frac{1}{5}$$

$$B_1^+ = B_1^+\left(x_1; \widehat{p}_1\right) = \left(30+30+30+30+30\right)\cdot\frac{1}{5} = \frac{150}{5} = 30$$

$$B_2^+ = \left(20+40+40+40+40\right)\frac{1}{5} = 36$$

$$B_3^+ = \left(10+30+50+50+50\right)\frac{1}{5} = 38$$

$$B_4^+ = 180\frac{1}{5} = 36$$

$$B_5^+ = 150\frac{1}{5} = 30$$

Отже, рішення має вид: x_2 (5 кошиків) або x_3 (6 кошиків).

П’ята інформаційна ситуація (I_5).

Ця *ІС* характеризується антагоністичними інтересами ЕС щодо суб’єкта керування в процесі прийняття рішень.

„Пасивне” ЕС характеризують інформаційні ситуації I_1, I_2, I_3, I_4 оскільки згідно до наведеної вище класифікації стани ЕС в полі цих інформаційних ситуацій реалізуються відповідно до заданого чи гіпотетичного закону розподілу ймовірностей.

На відміну від „пасивного” ЕС I_5 є активним економічним середовищем, яке активно протидіє досягненню максимальної ефективності рішень, які приймаються суб’єктом керування. Це досягається шляхом вибору таких станів, які зводять до мінімуму ефективність процесу управління.

Основною стратегією для системи керування в I_5 є забезпечення собі гарантованих рівнів значень функціоналу оцінювання, тобто зведення ризику до нуля.

Таким чином, у ситуації I_5 невизначеність цілком обумовлена тим, що суб’єкт керування не знає в якому стані перебуває економічне середовище. Однак у теоретичній моделі ступінь невизначеності зменшується в силу припущення про антагоністичність економічного середовища до СК (суб’єкт керування).

Критерій Вальда.

Якщо $F = F^+$, то оптимальне (безризикове) рішення x_{k_0} вибирається за принципом *maxmin* (максміну). Схема процесу прийняття оптимального рішення має вид: кожному рішенню $x_k \in X$ присвоюють як показник його гарантований рівень, який відповідає найменшій (за станом ЕС) компоненті відповідного вектора оцінювання $F_k^+ = \left\{ f_{k1}^+; \cdots ; f_{kn}^+ \right\}$. Згідно з критерієм Вальда оптимальним буде рішення:

$$x_{k0} : \tilde{f}_{k_0}^+ = \max_{x_k \in X} \tilde{f}_k^+ = \max_{x_k \in X} \min_{\theta_j \in \theta} f_{kj}^+ ,$$

де $f_k^+ = \min\limits_{\theta_j \in \theta} f_{kj}^+$.

Для випадку $F = F^-$ оптимальне рішення знаходимо згідно до принципом *minmax* (мінімаксу), а саме

$$x_{k0} : \tilde{f}_{k_0}^+ = \min_{x_k \in X} \tilde{f}_k^- = \min_{x_k \in X} \max_{\theta_j \in \theta} f_{kj}^- ,$$

де $f_k^+ = \max\limits_{\theta_j \in \theta} f_{kj}^+$.

Варто зазначити, що критерій Вальда має перевагу через свою консервативність, тобто є безризиковим для ситуацій, у яких недоцільно ризикувати.

Приклад 6. Виходячи з умови задачі про фруктового дилера (приклад 1), знайти гарантований рівень прибутку дилера і стратегію, яка гарантує цей прибуток.

Розв’язування. Цілі, обумовлені в умові задачі, гарантовано досягаються при використанні критерію Вальда, як критерію оптимальності. Враховуючи, що $F = F^+$, отримуємо:

$$\tilde{f}_1^+ = \min_{\theta_j \in \vartheta} f_{kj}^+ = \min\left(30;30;30;30;30\right) = 30$$

$$\tilde{f}_2^+ = \min\left(20;40;40;40;40\right) = 20$$

$$\tilde{f}_3^+ = 10$$

$$\tilde{f}_4^+ = 0$$

$$\tilde{f}_5^+ = -10.$$

Оскільки $\max \tilde{f}_{kj}^{+} = \max\left(30;20;10;0;-10\right) = 30$, то гарантований рівень прибутку дилера становить величина $\tilde{f}_{k0}^{+} = 30$\$. Цей результат досягається прийняттям рішення $x_{k0} = x_1$ (3 кошики).

Критерій мінімального ризику Севіджа.

Цей критерій запропонований у 1951 році. Він є одним із основних критеріїв, який відповідає принципові *minimax*. Початковим моментом для використання критерію Севіджа є перехід від функціоналу оцінювання $F^{\pm}$ до матриці ризику R^{-}. Тоді за Севіджем оптимальним слід вважати рішення виду:

$$x_{k0} : \tilde{r}_{k0}^{-} = \min_{x_k \in X} \max_{\theta_j \in \theta} r_{kj}^{-}.$$

Приклад 7. Виходячи з умови задачі про фруктового дилера (приклад 2) знайти мінімальний рівень збитків, пов'язаних з невикористанням своїх можливостей, а також стратегію, що його гарантує.

Розв'язування. Будуємо матрицю ризиків (приклад 2):

$$r_{kj}^{-} = R^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 & 40 \\ 10 & 0 & 10 & 20 & 30 \\ 20 & 10 & 0 & 10 & 20 \\ 30 & 20 & 10 & 0 & 10 \\ 40 & 30 & 20 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Застосовуємо критерій Вальда до побудованої матриці:

$$\tilde{r}_1^{-} = \max_{\theta_j \in \theta} r_{kj}^{-} = \max\left(0;10;20;30;40\right) = 40,$$

$$\tilde{r}_2^{-} = \max_{\theta_j \in \theta} r_{kj}^{-} = \max\left(10;0;10;20;30\right) = 30,$$

$$\tilde{r}_3^{-} = 20, \quad \tilde{r}_4^{-} = 30, \quad \tilde{r}_5^{-} = 40.$$

Оскільки $\min_{x_k \in X} \tilde{r}_{kj}^{-} = \min\left(40;30;20;30;40\right) = 20$, то мінімальний рівень збитків через невикористання своїх можливостей становлять 20 \$. Цей рівень гарантований стратегією x_2 (4 кошики) чи x_3 (5 кошиків).

Шоста інформаційна ситуація (I_6).

Для цієї ситуації властива наявність чинників, які зумовлюють „проміжну" поміж I_1, I_2, I_3, I_4, та I_5, поведінку ЕС.

Класичним прикладом критеріїв прийняття компромісних рішень у полі I_6 є критерій Гурвіца та критерій Ходжеса – Лемана.

Критерій Гурвіца.

Критерії Вальда та Севіджа песимістичні в тому сенсі, що з кожним рішенням вони поєднують стан середовища, що призводить до гарантованих (безризикових) наслідків для прийняття суб'єктом керування рішення. Для моделювання поведінки середовища, яке вважається найкращим для суб'єкта управління, Гурвіц пропонує використовувати зважену комбінацію найкращого та найгіршого.

Такий підхід до вибору рішення відомий як критерій показника песимізму – оптимізму. Особливість цього критерію в тому, що в ньому передбачається неповний антагонізм середовища, а лише частковий.

Згідно до критерію Гурвіца для випадку $F = F^{+}$ оптимальним буде рішення:

$$x_{k_0} : G^{+}\left(x_{k_0}, \lambda\right) = \max G^{+}\left(x_k, \lambda\right),$$

де $G^{+}\left(x_k; \lambda\right) = \left(1-\lambda\right)\max f_{kj}^{+} + \lambda \min f_{kj}^{+}, \lambda \in \left[0;1\right]$. Величина $G_{k\lambda}^{+} = G^{+}\left(x_k; \lambda\right)$ має назву λ - показника Гурвіца для рішення $x_k \in X$. Вважається, що рішення x_k буде більш пріоритетним (тобто придатнішим), ніж $x_l \left(x_k > x_l\right)$ тоді й тільки тоді, якщо $G^{+}\left(x_k; \lambda\right) > G^{+}\left(x_l; \lambda\right)$. Відзначимо, що при $\lambda = 1$, $G^{+}\left(x_k; \lambda\right) = \min f_{kj}^{+}$, тобто критерій Гурвіца збігається з критерієм Вальда. При $\lambda = 0$, $G^{+}\left(x_k; \lambda\right) = \max f_{kj}^{+}$, тобто є збіг з максимальним критерієм. У першому випадку вважаємо, що середовище максимально протидіє цілям суб'єкта управління, а в другому навпаки – середовище найкращим чином сприяє цілям управління. В першому випадку (λ=1) поведінка ЕС порівнюється з „розумним суперником", у другому(λ=0) - із „зовсім бездарним". Однак, якщо вважати, що ці випадки є крайніми, то істинна поведінка середовища буде знаходитися між ними. Вона буде характеризуватися величиною $\lambda \in \left(0;1\right)$.

У випадку $F = F^{-}$, оптимальним є рішення:

$$x_{k_0} : G^{-}\left(x_{k_0}, \lambda\right) = \min G^{-}\left(x_k, \lambda\right),$$

де $G^{-}\left(x_{k_0}, \lambda\right) = \left(1-\lambda\right)\min f_{kj}^{-} + \lambda \max f_{kj}^{-}, \lambda \in \left[0;1\right]$.

У цьому випадку $x_k > x_l$ тоді й тільки тоді, якщо $G^{-}\left(x_k; \lambda\right) < G^{-}\left(x_l; \lambda\right)$. Як і раніше параметр λ можна інтерпретувати як коефіцієнт несхильності до ризику. Щодо вибору коефіцієнта $\lambda \in \left[0;1\right]$, то чіткої методики його обрання не існує. Однак можна запропонувати декілька варіантів.

При виборі коефіцієнта λ суб'єктом управління можна скористатися евристичними методами, що базуються на власному досвіді та знаннях про особливості набуття середовищем своїх станів із множини θ. Наприклад, чим більш переконливі докази про прийняття однієї з крайніх поведінок середовища, тим ближчим буде значення λ до одиниці чи до нуля. Для значення $\lambda = \frac{1}{2}$ цілком природньо вважати, що суб'єкт управління вважає середовище однаковою мірою антагоністичним або максимально „сприяючим" цілям управління.

<u>Приклад</u> 8. Вивчаються чотири різних портфелі цінних паперів щодо вкладу інвестицій. Розрахункові норми прибутків, у залежності від стану економіки (θ_1 – піднесення; θ_2 - стагнація; θ_3 - рецесія) наведені в таблиці.

Варіанти портфеля цінних паперів	Норми прибутку (%)		
	θ_1	θ_2	θ_3
x_1	25	35	15
x_2	70	25	30
x_3	20	75	25
x_4	65	45	40

Несхильність до ризику інвестора виражається вибраним ним коефіцієнтом несхильності до ризику $\lambda \in [0.6; 0.8]$. Треба обрати варіант оптимального рішення:

а) з точки зору накладених умов;

б) з урахуванням матриці ризику (невикористаних можливостей).

Розв'язування. Оскільки функціонал оцінювання містить позитивний інгредієнт, то λ - оцінки Гурвіца обраховуємо за формулою:

$$G^{+}\left(x_k;\lambda\right) = \left(1-\lambda\right)\max_{\theta_j \in \theta} f_{kj}^{+} + \lambda \min_{\theta_j \in \theta} f_{kj},\ k = \overline{1,4}\ .$$

Якщо до матриці

$$F^{+} = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 15 \\ 70 & 25 & 30 \\ 20 & 75 & 25 \\ 65 & 45 & 40 \end{pmatrix}$$

застосувати операцію згортання Гурвіца з довільним параметром λ, то отримаємо:

$$F^{+} \underset{\Rightarrow}{G^{+}} \begin{pmatrix} G^{+}\left(x_1;\lambda\right) \\ G^{+}\left(x_2;\lambda\right) \\ G^{+}\left(x_3;\lambda\right) \\ G^{+}\left(x_4;\lambda\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1-\lambda\right)\cdot 35 + 15\lambda \\ \left(1-\lambda\right)\cdot 70 + 25\lambda \\ \left(1-\lambda\right)\cdot 75 + 20\lambda \\ \left(1-\lambda\right)\cdot 65 + 40\lambda \end{pmatrix} = G^{+}\left(\lambda\right).$$

У системі координат (λ; y)будуємо ламану Гурвіца (рис.1).

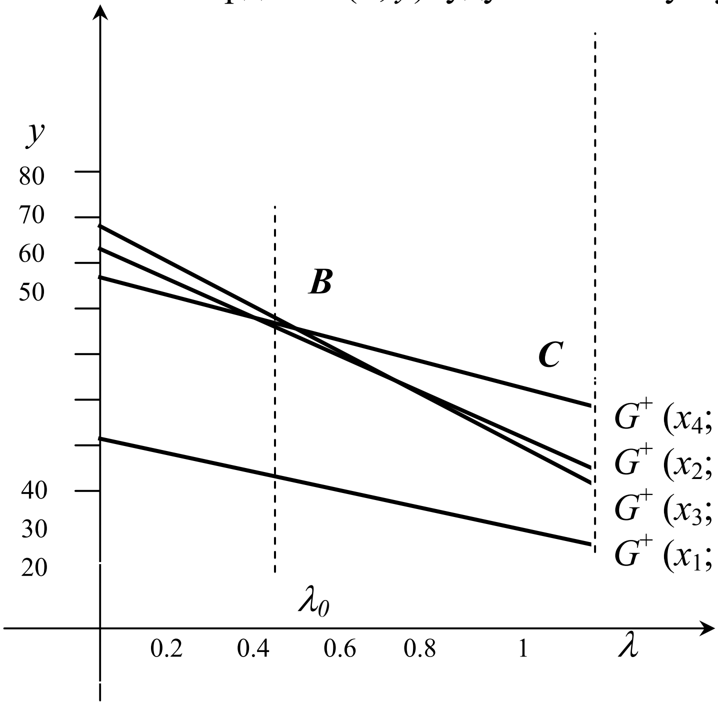


Рис. 1. Визначення оптимального рішення з допомогою ламаної Гурвіца ($F = F^{+}$)

Згідно до означення ламана Гурвіца задається співвідношенням:

$$y = \max G^{+}\left(x_k;\lambda\right).$$

Графічним відображенням її є ламана лінія *ABC*. Оскільки лінії $G^+(x_1;\lambda)$ та $G^+(x_2;\lambda)$ знаходяться під ламаною *ABC*, то x_1 і x_2 не приймаємо до уваги. Для $\lambda \in [0;\lambda_0]$ більших значень набирає функція $G^+(x_3;\lambda)$. Отже, для цих значень параметра λ розв'язок x_3 є більш пріоритетним, ніж x_4. Для $\lambda \in [\lambda_0;1]$ величина $G^+(x_4;\lambda) > G^+(x_3;\lambda)$. Значить, для цих значень λ більш пріоритетним є розв'язок x_4. Значення λ_0 знаходимо з умови:

$$G^+(x_4;\lambda) = G^+(x_3;\lambda)$$

$$(1-\lambda_0)\cdot 75 + \lambda_0 \cdot 20 = (1-\lambda_0)\cdot 65 + \lambda_0 \cdot 40$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{3}.$$

Оскільки, згідно до умови, несхильність до ризику інвестора адекватна виразу $\lambda \in [0.6;0.8]$, на основі аналізу побудованого рисунка, оптимальним слід вважати рішення x_4.

Від заданого функціоналу оцінювання F^+ переходимо до матриці ризику R^-:

$$F^+ \Rightarrow R^- = \begin{pmatrix} 45 & 40 & 25 \\ 0 & 50 & 10 \\ 50 & 0 & 15 \\ 5 & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця ризиків R^- має негативний інгредієнт, то для неї λ-оцінки Гурвіца обраховуються за формулою:

$$G^-(x_k;\lambda) = (1-\lambda)\min_{\theta_j\in\theta} r^-_{kj} + \lambda \max_{\theta_j\in\theta} r^-_{kj}, k=\overline{1,4}.$$

Застосувавши операцію згортання $\underset{\Rightarrow}{G^-}$ до матриці R^-, отримуємо:

$$R^- \underset{\Rightarrow}{G^-} = \begin{pmatrix} G^-(x_1;\lambda) \\ G^-(x_2;\lambda) \\ G^-(x_3;\lambda) \\ G^-(x_4;\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)\cdot 25 + 45\lambda \\ (1-\lambda)\cdot 0 + 50\lambda \\ (1-\lambda)\cdot 0 + 50\lambda \\ (1-\lambda)\cdot 0 + 30\lambda \end{pmatrix} = G^-(\lambda).$$

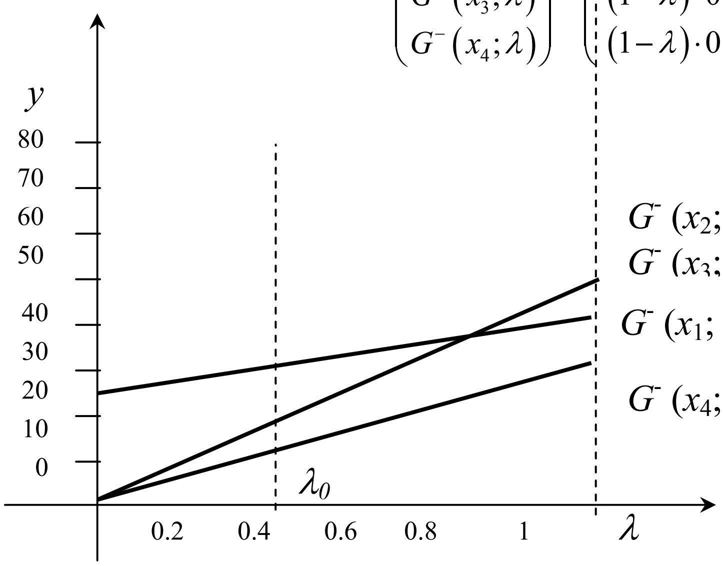


Рис. 2. Визначення оптимального рішення за допомогою ламаної Гурвіца ($F = F^-$)

На рис. 2 побудована відповідна ламана Гурвіца. У випадку, коли функціонал оцінювання містить негативний інгредієнт (у даному випадку роль функціонала відіграє матриця R^-), ламана Гурвіца задається співвідношенням: $y = \min_{x_k \in x} G^-(x_k;\lambda)$, а тому на рисунку(2) її графічним відображенням є відрізок AO прямої лінії.

Як бачимо, виходячи з позиції найкращого використання своїх можливостей, найвищий пріоритет має рішення x_4.

Критерій Ходжеса – Лемана.

Ходжес і Леман дотримуються думки про те, що в практиці прийняття рішень в умовах невизначеності інформація про стан ЕС знаходиться між повним незнанням і точним знанням апріорного розподілу. Критерій Ходжена-Лемана дає змогу використовувати всю інформацію, що її має суб'єкт управління, але в той же час забезпечує заданий рівень гарантії у випадку, коли ця інформація неточна. У деякому плані критерій Ходжена-Лемана являє собою „суміш" критеріїв Байєса та Вальда.

Згідно до критерію Ходжена-Лемана для випадку $F = F^+$ оптимальним буде рішення:

$$x_{k0} : HL^+(x_{k0}; p;\lambda) = \max HL^+(x_k; p;\lambda),$$

де $HL^+(x_k; p;\lambda) = (1-\lambda)B^+(x_k; p) + \lambda \min_{\theta_j \in \theta} f_{kj}^+$.

У випадку $F = F^-$ оптимальне рішення має вид:

$$x_{k0} : HL^-(x_{k0}; p;\lambda) = \min HL^-(x_k; p;\lambda),$$

де $HL^-(x_k; p;\lambda) = (1-\lambda)B^-(x_k; p) + \lambda \max_{\theta_j \in \theta} f_{kj}^-$.

Параметр λ знаходиться у проміжку від 0 до 1 ($\lambda \in [0;1]$). Його можна інтерпретувати як коефіцієнт несхильності до ризику.

Критерій Парето.

Розглянемо функціонал оцінювання F, побудований з позиції m альтернативних рішень $x_k, k = \overline{1,m}$ і n можливих станів ЕС $\theta_j;\ j = \overline{1,n}$. Кожному рішенню x_k відповідає свій вектор оцінювання $F_k = (f_{k1}, f_{k2}, \dots, f_{kn})$. При співставленні різних рішень порівнюються відповідні елементи векторів оцінювання.

Оптимальність за Парето.

Згідно з Парето рішення $x_к$ вважається не гіршим від рішення x_l (позначається: $x_k \geq x_l; x_k \cdot x_l \in X$) якщо для всіх елементів відповідних векторів F_k і F_l мають місце оцінки $f_{kj}^+ \geq f_{lj}^+$ якщо $F = F^+$ чи $f_{kj}^- \leq f_{lj}^-$ якщо $F = F^-$. Якщо хоч би для однієї компоненти f_{ks}, $1 \leq s \leq n$ вектора F_k має місце одна із строгих нерівностей виду

$$f_{ks}^+ > f_{ls}^+ \left(F = F^+\right)$$
$$f_{ks}^- < f_{ls}^- \left(F = F^-\right),$$

то рішення x_k вважається кращим від рішення x_l (записується $x_k > x_l$). Рішення $x_{k0} \in X$ є оптимальним за Парето, якщо в множині X не знайдеться рішення, кращого від x_{k0}.

Приклад 10. Фруктовий дилер (приклад 2) з урахуванням прогнозованої спеки відкоригував ФО, виходячи з міркувань про те, що через спеку певна кількість малини зіпсується під кінець дня:

$$F^{+} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 30 & 30 & 30 \\ 25 & 30 & 45 & 40 & 40 \\ 10 & 30 & 40 & 40 & 40 \\ 0 & 20 & 40 & 40 & 40 \\ -10 & 10 & 30 & 40 & 40 \end{pmatrix}.$$

Знайти рішення оптимальне за Паретто.

Розв'язування. Оскільки $x_2 > x_1; та\, x_2 > x_3 > x_4 > x_5$, то оптимальним за Парето буде рішення $x_{k0} = x_2$ (4 кошики малини).

Зважений функціонал оцінювання.

На практиці часто виникає ситуація, при якій кожному рішенню $x_k \in X$ відповідає свій розподіл імовірностей станів у ЕС (ситуація в страховому менеджменті):

$$Q_k = \{q_{k1}; q_{k2}; \ldots, q_{kn}\}, \; \sum_{j=1}^{n} q_{kj} = 1, k = \overline{1,m}.$$

А тому в основі процедури прийняття рішення лежить аналіз вже двох матриць:

$$F = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \cdots & \theta_j & \cdots & \theta_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1j} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{k1} & \cdots & f_{kj} & \cdots & f_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mj} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \end{array}; \; Q = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \cdots & \theta_j & \cdots & \theta_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1j} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{k1} & \cdots & q_{kj} & \cdots & q_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mj} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Розв'язування цієї задачі зводиться до аналізу зваженого функціоналу оцінювання FQ:

$$FQ = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \cdots & \theta_j & \cdots & \theta_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} f_{11}q_{11} & \cdots & f_{1j}q_{1j} & \cdots & f_{1n}q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{k1}q_{k1} & \cdots & f_{kj}q_{kj} & \cdots & f_{kn}q_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1}q_{m1} & \cdots & f_{mj}q_{mj} & \cdots & f_{mn}q_{mn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Що стосується функціонала FQ, то прийняття рішення на його основі можна здійснити як з допомогою критерію Парето, так і будь-якого іншого критерію оптимальності.

Прийняття багатоцільових рішень в умовах ризику

1. Прийняття рішення для декількох матриць оцінювання;
2. Вибір рішення для однієї матриці оцінювання і декількох критеріїв.

Нехай маємо декілька матриць оцінювання:

$F^f=\{f_{kj}^{'}\}$

Наприклад нехай діяльність підприємства оцінюється прибутком і фондовіддачею.

Прийняття рішеню здійснюється зведенням матриць оцінювання до однієї матриці. Таке зведення проводиться з використанням таких чинників: V_i, U,W.

V_i – це чинник нормалізації, він використовується для зведення матриць оцінювання до одного діапазону значень. Є багато методів нормалізації. Найчастіше використовується метод природної нормалізації. Він грунтується на такій формулі: $\tilde{f}_{kj}^{\,l} = \dfrac{f_{kj}^{e} - \min f_{kj}^{e}}{\max f_{kj}^{e} - \min f_{kj}^{e}}$

Якщо знаменник = 0, або наближено = 0, тоді в знаменнику записуємо:

$\max f_{kj}^{e}$ або $\min f_{kj}^{e}$

Внаслідок нормалізації одержимо, що всі значення матриць оцінювання будуть знаходитись на проміжку [0,1].

Величина U – це чинник переваги. Чинник U грунтується на такій формулі:

$$\tilde{f}_{kj} = \sum_{e=1}^{n} Ue \cdot \hat{f}_{kj}^{e}$$

Величини Ue – задовольняють умови $\sum_{e=1}^{n} Ue = 1$

L – число матриць оцінювання:

Нехай маємо дві матриці оцінювання: прибуток і фондовіддача. Тоді U_1 = 0,7, U_2 = 0,3. в результаті використання чинника У одержимо одну матрицю оцінювання.

Чинник W – це критерій згортки (вивчався в попередній темі).

Приклад – (Методика розв’язання задачі №6)

Нехай F_1 – матеріаломісткість

F_2 – енергомісткість.

$$F_1 = \left(\begin{array}{c|c} 15 & 0 \\ 1 & 9 \\ 2 & 5 \end{array}\right) \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Число 15 – це матеріаломісткість продукції при першому стані середовища і першому варіанті рішень.

Оскільки діапазони значень відрізняються, то застосовуємо природну нормалізацію.

В кожному стовбці матриць оцінювання визначаємо найбільші та найменші числа

max: 15 9 max: 5 6

min: 1 0 min: 0 2

$$\hat{f}_{11}^{\,1} = \frac{15-1}{15-1} = 1 \qquad \hat{f}_{11}^{2} = \frac{0-0}{5-0} = 0$$

$$\hat{f}_{21} = \frac{1-1}{15-1} = 0 \qquad \hat{f}_{21}^{2} = \frac{2-0}{5-0} = \frac{2}{5}$$

$$\hat{f}_{21}^{2} = \frac{6-2}{6-2} = 1$$

Нормалізовані матриці оцінювання матимуть такий вид:

$$\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{14} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \qquad \hat{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

З допомогою чинника U зводимо обидві матриці до однієї

Нехай U_1=1/4, тоді U_2=3/4

$$\hat{f}_{12} = U_1 \hat{f}'_{11} + U_2 \hat{f}_{11}^{2} = \frac{1}{4} \bullet 1 + \frac{3}{4} \bullet 0 = \frac{1}{4}$$

$$\hat{f}_{11} = U_1 \hat{f}_{11}^{1} + U_2 \hat{f}_{11}^{2} = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4}$$

Остаточна матриця має вигляд:

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 84/280 & 36/144 \\ 215/280 & 47/144 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} MAX \\ 3/4 \\ 84/280 \to min \\ 215/280 \end{array}$$

До цієї матриці застосовуємо критерій Вальда. Оскільки обидві матриці негативні, то критерій Вальда записується так:

$$\underset{k}{min} \; \underset{f'}{max} \; f_{kj}$$

В кожному рядку підсумкової матриці визначаємо найбільше число.

В: потрібно прийняти другий варіант рішень.

Розглянемо другий спосіб зведення декількох матриць оцінювання до однієї.

Для кожної з матриць застосовуємо один із розглянутих в попередній темі критеріїв. В результаті цього одержимо єдину матрицю оцінювання. До одержаної матриці застосовуємо ще один із критеріїв з попередньої теми.

Приклад: Нехай матриці такі самі:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 1 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Для кожної з них застосовують критерій Вальда

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 9 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} 15 \\ 9 \\ 5 \to min \end{array}$$

В: Третій варіант рішень.

3. Розглянемо такий приклад: нехай матриця $F = \begin{pmatrix} 3\,6 \\ 1\,3 \\ 0\,3 \end{pmatrix}$

Нехай критерії – це критерії Байєса і модальний $p_1=0.4$, $p_2=0.6$

Згідно модального критерію приймається той стан економіки, якому відповідає найбільша імовірність.
Застосовуємо критерій Байєса:
$f_{11}=3*0.4+6*0.6=4.8$
$f_{21}=1*0.4+3*0.6=2.2$
$f_{31}=0*0.4+3*0.6=1.8$
В новій матриці оцінювання кількість стовбців дорівнюватиме числу критерії. Перший стовбець відповідає критерію Байєса, другий – модальному.
Нова матриця: min

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 4.8\,6 \\ 2.2\,3 \\ 1.8\,3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 4.8 \to max \\ 2.2 \\ 1.8 \end{matrix}$$

Оскільки більша імовірність p2, тому згідно модальному критерію із початкової матриці виписуємо другий стовбець. Одержимо нову матрицю оцінювання, яка враховує початкову матрицю і критерій. До основної матриці застосовуємо один із вивчених критеріїв, наприклад: нехай початкова матриця Ф:
Застосовуємо критерій Вальда:
$\max_k(\min f_{kj})$ F.

В: приймаємо перший варіант.

Тема:Вартість,час і ризик.

1.Вартість і час, і норма дисконту та ризик.

Власник капіталу може використати тепер його або інвестувати у певну справу з метою збереження і примноження цього капіталу.

Якщо існує декілька варіантів інвестування з однаковими майбутніми доходами, то вибирається той варіант, при якому доходи надійдуть як найшвидше.

Отже, важливу роль відіграє зміна вартості за часом.Зміна вартості під впливом часу визначається із застосуванням норми дисконту.

Норма дисконту - це норма доходу на альтернативні інвестаційні можливості,які доступні на ринку і мають приблизно однакову величину ризику.

Із зростанням ризику норма дисконту також зростає і навпаки.

2.Визначення теперішньої і майбутньої вароcті.

Нехай відома норма дисконту r і початкова вартість капіталу PV.Потрібно визначити вартість капіталу ч/з деякий час.Якщо розглядається річна норма дисконту,то через рік вартість капіталу становитеме:

$$FV_1 = PV + rPV = PV(1+r)$$

Якщо величина r задана у % то її потрібно поділити на 100 .

Через 2 роки:

$$FV_2 = PV(1+r) + rPV(1+r) = PV(1+r)^2$$

На основі цих двох формул можна записити вартість капіталу через t років

$$FV_t = PV(1+r)^t$$

Приклад Нехай початкова вартість капіталу PV=1000 гр.од.

r=0.3,або 30%.Визначити вартість капіталу через 2 роки.

$$FV_2 = 1000(1+0.3)^2 = 1690 \text{ гр.од}$$

Запишемо формулу для визначення майбутньої вартості,дисконту змінюється з часом

$$FV_t = PV(1+r_1)^{T_1} + (1+r_2)^{T_2} + ... + (1+r_k)^{T_k}$$

r_1 - норма дисконту,яка діяла на протязі часу T_1 і т.д.

Розглянемо визначення теперішньої вартості капіталу на основі його иайбутноьї вартості.

Теперішня вартість визначається

$$PV = \frac{FV_t}{(1+r)^t}$$

Якщо майбутні доходи появляються в різні моменти часу,теперішня їх сумарна вартість визначається так:

$$PV = \sum_{t=1}^{T} \frac{FV_t}{(1+r)^t}$$

П-д. Є 2 варіанти одержання певного доходу. Перший варіант: одночасно одержали в даний момент величину 2300 гр.од.Другий варіант:щорічно одержувати по 1200 гр.од протягом 3 років .Прицьому річна норма дисконту 10 %.Вибрати кращий варіант.

Визначимо теперішню вартість доходу в 2 варіанті.

$$PV = \frac{1200}{(1+0.1)^1} + \frac{1200}{(1+0.1)^2} + \frac{1200}{(1+0.1)^3} = 2995 \text{ гр.од}$$

Висновок: вибираємо 1-й варіант,тому що його теперішня вартість більша.

Умова: Підприємство сподівається одержати дохід 1млн. грош. од. при нормі дискоту 5%. Визначити теперішню вартість майбутнього доходу в залежності від часу його надходження.

Запишемо теперішню вартість доходу, якщо він надійде через рік.

$$PV = \frac{FV_1}{(1+r)^1}, \qquad PV = \frac{1 \cdot 10^6}{1+0.05} = 952.381 \textit{гр.од.}$$

Результати обчислення записуємо у вигляді таблиці

Час надходження	Теперішня вартість
0	$1*10^6$
1	952,381
2	907,029
3	863,838

Тема: Ризик і стохастичне прогнозування

1.Класифікація задач стохастичного програмування.

Стохастичне програмування – це розділ математичного прграмування, який досліджує оптимальні значення функції з певними обмеженнями на невідомі величини, якщо параметри, які входять в задачу, мають випадковий характер.

Розглянемо таку задачу математичного програмування:

нехай $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j (extr)$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b_j \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

В конкретній задачі в кожному з обмежень може бути записаний один із знаків $\ge, =, \le$. В цій задачі є 3 параметри c_j, a_{ij}, b_j.

x_j - це невідомі велечини, значення яких знаходяться в результаті розв'язання задачі.

Випадковий характер може мати цільовафункція Z, або ліва та права частина обмежень.

2.Задачі про оптимізацію вкладів в банки і страхування майна.

Розглянемо задачу про оптимізазію вкладів в банки. Нехай маємо два банки А і Б.

Банк А дає відсоток а, тобто якщо вкладено 100 грош. од. то через повний період буде нарахована сума 100+а.

Банк Б дає відсоток в.

Банк А – безризиковий, тобто втрата вкладень неможлива.

Банк Б – має імовірність банкрутства р.

Нехай клієнт має суму S. Потрібно визначити як розподілити цю суму між обома банками. Оскільки 2-й банк ризиковий, то в >а.

Критерії оптимальності – це max корисності від одержаних доходів.

Для побудови математичної моделі введемо такі позначення:

X – величина внеску в банк А.

S – X – Величина внеску в банк Б.

U(X) – корисність від величини X.

Розглянемо 2 можливі ситуації:

1) банк Б не збанкрутує

Тоді клієнт матиме суму:

$$X\left(1+\frac{a}{100}\right)+(S-X)\left(1+\frac{в}{100}\right)$$

2)банк збанкрутує:

$$X\left(1+\frac{a}{100}\right)+(S-X)\left(1+\frac{в}{100}\right)$$

Запишемо математичний вираз для цільової функції;

$$Z=(1-p)U\left(X\left(1+\frac{a}{100}\right)+(S-X)\right)\left(1+\frac{в}{100}\right)+PU\left(\frac{a}{100}X-S+2X\right)\Rightarrow \max$$

$$0\le X\le S$$

Розглянемо задачу про страхування.

Нехай суб’єкт має капітал (або майно) вартістю S. Потрібно визначити яку частину цього майна необхідно застрахувати. Нехай страховий внесок складає *r* %, тобто якщо страхуємо на 100 одиниць,то страховій організації сплачується *r* грошових одиниць. Страхове відшкодування g %, тобто від страхової суми 100 грошових одиниць у випадку знищення майна клієнт одержить відшкодування g (грошових одиниць).

U (x) – корисність власного майна. Потрібно визначити величину x на яку доцільно застрахувати майно. Таким чином, щоб загальна корисність була max.

Нехай p – це імовірність недоторканності майна. Математична модель задачі така:

$$Z=pU(S-\frac{r}{100}x)+(1-p)U(\frac{g}{100}x)\to \max$$

$$0\le x\le S$$

Розглянемо методику виконання №7.

Нехай S=100 грн.

r=0.5% g=80%

p=0.9 U(t)=0.7t

Записуємо математичну модель задачі:

Z=0.9*U(100-0.005x)+0.1U(0.8x)=0.9*0.7(1000-0.005x)+0.1*0.7*0.8x→max

Z=0.63*1000-0.63*0.005x+0.056x=630-0.00315x-0.056x=630+0.05285x

Обчислюємо першу похідну :

Z’(x)=0.05285

Отже функція приймає екстремальне значення на кінцях інтервалу зміни x.

В зв’язку з тим, що функція зростаюча внаслідок додатковості коефіцієнта при x, то мах. значення функція досягає при x=9.

Отже доцільно страхувати майно на повну його вартість, тобто на 100 грн.

Література

1. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Ризик в менеджменті. Київ: Борисфен,1996.
2. Вітлінський В.В., Верченко П.І. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2000. –292с.
3. Вітлінський В.В., Верченко П.І., Сігал А.В., Наконечний Я.С. Економічний ризик: ігрові моделі. – К.:КНЕУ, 2002.
4. Івченко І.Ю. Економічні ризики: Навчальний посібник. – Київ: “Центр навчальної літератури”, 2004. –304с.
5. Ілляшенко С.М. Економічний ризик. К., 2004.
6. Машина Н.І. Економічний ризик та методи його вимірювання. Навчальний посібник. – Київ: “Центр навчальної літератури”, 2003. –188с.
7. Старостіна А.О. Ризик-менеджмент. –К., 2004.
8. Управління підприємницьким ризиком (за редакцією Д. А. Штефанича) — Тернопіль: «Економічна думка», 1999. — 224с.